MATEMATICA

Scheda 04

Monomi e polinomi

operazioni, potenze e prodotti notevoli

Teoria | Esempi | Esercizi | Soluzioni

Una guida passo passo per riconoscere monomi e polinomi, calcolare con sicurezza, comprendere i prodotti notevoli e allenarsi con esercizi graduati e soluzioni spiegate.

Indice

1 Che cos'è un monomio **2**

2 Coefficiente, parte letterale e grado **2**

3 Monomi simili, opposti e uguali **2**

4 Somma e sottrazione tra monomi **3**

5 Prodotto e divisione tra monomi **3**
5.1 Moltiplicazione . . . 3
5.2 Divisione . . . 3

6 Potenza di un monomio **4**

7 Che cos'è un polinomio **4**

8 Termini, grado e forma ridotta **4**
8.1 Ordinare un polinomio . . . 5

9 Somma e sottrazione tra polinomi **5**

10 Prodotto tra un monomio e un polinomio **5**

11 Prodotto tra polinomi **6**

12 Prodotti notevoli fondamentali **6**
12.1 Quadrato di una somma . . . 6
12.2 Quadrato di una differenza . . . 6
12.3 Somma per differenza . . . 7
12.4 Cubo di una somma . . . 7
12.5 Cubo di una differenza . . . 7

13 Errori tipici da evitare **7**

14 Esercizi svolti **8**

15 Esercizi finali **9**

16 Soluzioni degli esercizi finali **11**

17 Mappa riassuntiva **12**

1 Che cos'è un monomio

Un **monomio** è un'espressione algebrica costituita dal prodotto di un numero e di potenze di lettere con **esponenti interi non negativi**. Le lettere rappresentano numeri e vengono dette variabili.

$$\boxed{-3x^2y} \qquad 5a \qquad -\frac{2}{3}ab^3 \qquad 7.$$

Anche un numero da solo è un monomio (*monomio costante*). Le scritture $2/x$, x^{-1} e $\sqrt{x}$ **non sono monomi** nel senso usato in questa scheda: la variabile compare con esponente negativo o frazionario.

Ricorda

Per riconoscere un monomio chiediti: dopo aver semplificato, è un prodotto di un numero e potenze di lettere con esponenti $0, 1, 2, \ldots$? Se sì, è un monomio. Per esempio $2x \cdot 3x^2 = 6x^3$.

2 Coefficiente, parte letterale e grado

Nel monomio $-5x^2y^3$ distinguiamo:

- **coefficiente numerico**: -5, cioè il numero che moltiplica le lettere;
- **parte letterale**: x^2y^3, cioè le lettere con i loro esponenti;
- **grado complessivo**: $2 + 3 = 5$, cioè la somma degli esponenti delle lettere.

Il **grado rispetto a una lettera** è il suo esponente: rispetto a x è 2, rispetto a y è 3. Una lettera assente ha esponente 0.

Esempio

$4a^3b$ ha coefficiente 4, parte letterale a^3b, grado complessivo 4, grado 3 in a e 1 in b. Il monomio costante non nullo 9 ha grado 0.

Attenzione

Il monomio nullo 0 ha coefficiente zero e **grado non definito**. Non assegnargli automaticamente grado zero: questo vale per le costanti *non nulle*.

3 Monomi simili, opposti e uguali

Due monomi sono **simili** quando hanno la stessa parte letterale, con le stesse lettere e gli stessi esponenti. I coefficienti possono essere diversi.

$$3x^2y, \quad -7x^2y, \quad \frac{1}{2}x^2y \quad \text{sono simili.}$$

Sono **opposti** quando sono simili e hanno coefficienti opposti, per esempio $5ab$ e $-5ab$. Sono **uguali** quando hanno anche lo stesso coefficiente, per esempio $2xy$ e $xy \cdot 2$.

Attenzione

$2x^2y$ e $2xy^2$ **non sono simili**: scambiare gli esponenti cambia la parte letterale. Invece $3xy$ e $3yx$ sono uguali perché il prodotto è commutativo.

4 Somma e sottrazione tra monomi

Si possono **ridurre a un solo monomio** soltanto monomi simili: si sommano o sottraggono i coefficienti e si lascia invariata la parte letterale.

$$\boxed{ax^2 + bx^2 = (a+b)x^2}.$$

Esempio

$$7a^2b - 3a^2b + 2a^2b = (7-3+2)a^2b = \boxed{6a^2b}.$$

Esempio

$4x + 3x^2$ **non si riduce** a $7x^3$: i monomi non sono simili. La somma rimane $4x + 3x^2$, che è un polinomio.

Ricorda

Se la somma dei coefficienti è zero, i monomi si annullano: $6xy - 6xy = 0$.

5 Prodotto e divisione tra monomi

5.1 Moltiplicazione

Moltiplica i coefficienti e, per ogni lettera uguale, **somma gli esponenti**:

$$\boxed{(ax^m y^n)(bx^p y^q) = abx^{m+p}y^{n+q}}.$$

Esempio

$$(-2a^2b)(3ab^3) = (-2\cdot 3)a^{2+1}b^{1+3} = \boxed{-6a^3b^4}.$$

5.2 Divisione

Dividi i coefficienti e, per ogni lettera comune, **sottrai gli esponenti**. Il divisore deve essere diverso da zero.

Perché il risultato sia ancora un monomio, **ogni lettera presente nel divisore deve comparire anche nel dividendo con esponente almeno uguale**. Le lettere presenti soltanto nel dividendo rimangono nel risultato.

Esempio

$$\frac{12x^5y^3}{-3x^2y} = \frac{12}{-3}x^{5-2}y^{3-1} = \boxed{-4x^3y^2}.$$

Attenzione

La divisione tra monomi **non dà sempre un monomio**: $x^2 : x^5 = x^{-3} = 1/x^3$ (per $x \neq 0$), che non è un monomio. Per ottenere ancora un monomio, gli esponenti risultanti devono essere non negativi. Nelle divisioni con lettere al denominatore valgono anche le condizioni che rendono il divisore non nullo.

6 Potenza di un monomio

Eleva il coefficiente alla potenza indicata e **moltiplica tutti gli esponenti** delle lettere per l'esponente esterno:

$$\boxed{(ax^m y^n)^r = a^r x^{mr} y^{nr}}, \qquad r \in \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Esempio

$$(-2x^2y)^3 = (-2)^3 x^6 y^3 = \boxed{-8x^6y^3}.$$

$$(-3ab^2)^2 = 9a^2b^4.$$

Ricorda

Una potenza con esponente pari rende positivo un coefficiente negativo; con esponente dispari mantiene il segno negativo.
Caso particolare: esponente zero. Per ogni monomio **non nullo** M vale $M^0 = 1$. La scrittura 0^0 non è definita in questa scheda.

7 Che cos'è un polinomio

Un **polinomio** è una somma algebrica di monomi. I monomi che lo compongono si chiamano **termini**.

$$\boxed{P(x) = 3x^2 - 2x + 5}.$$

In questo esempio i termini sono $3x^2$, $-2x$ e 5. Un polinomio con un solo termine è un monomio; con due termini è un **binomio**, con tre un **trinomio**.

Esempio

$2x^2 + 3x - 1$ è un trinomio. $4a - 7$ è un binomio. $6x^3$ è contemporaneamente un monomio e un polinomio.

8 Termini, grado e forma ridotta

Un polinomio è in **forma ridotta** quando i termini simili sono stati sommati. Per esempio:

$$2x^2 + 3x - 5x^2 + x + 1 = \boxed{-3x^2 + 4x + 1}.$$

Il **grado di un polinomio non nullo** è il grado più alto tra i suoi termini *dopo la riduzione*. Nel polinomio $-3x^2 + 4x + 1$ il grado è 2. Il **termine noto** è il termine senza lettere, qui 1.

Attenzione

Prima riduci, poi stabilisci il grado! $x^3 - x^3 + 2x$ ha grado 1, non 3. Il polinomio nullo ha grado non definito.

8.1 Ordinare un polinomio

Un polinomio in una variabile è ordinato **per potenze decrescenti** se si scrivono prima i termini di grado maggiore: $5x^3 - 2x^2 + x - 7$. Se mancano potenze intermedie, il polinomio è **incompleto**: $x^3 + 2x - 1$ non contiene il termine in x^2.

9 Somma e sottrazione tra polinomi

Per sommare, elimina le parentesi e raccogli i termini simili. Per sottrarre, **cambia segno a tutti i termini** del polinomio sottratto.

Esempio

Siano $A = 2x^2 + 3x - 4$ e $B = x^2 - 5x + 1$. Allora

$$\begin{aligned} A + B &= (2x^2 + 3x - 4) + (x^2 - 5x + 1) \\ &= \boxed{3x^2 - 2x - 3}, \\ A - B &= (2x^2 + 3x - 4) - (x^2 - 5x + 1) \\ &= 2x^2 + 3x - 4 - x^2 + 5x - 1 \\ &= \boxed{x^2 + 8x - 5}. \end{aligned}$$

Attenzione

$-(2x^2 - 3x + 5) = -2x^2 + 3x - 5$: il segno meno davanti alla parentesi modifica **ogni termine**, non solo il primo.

10 Prodotto tra un monomio e un polinomio

Si applica la **proprietà distributiva**: il monomio moltiplica ciascun termine del polinomio.

$$\boxed{a(b + c) = ab + ac}.$$

Esempio

$$\begin{aligned} -2x(3x^2 - 4x + 5) &= (-2x)(3x^2) + (-2x)(-4x) + (-2x)(5) \\ &= \boxed{-6x^3 + 8x^2 - 10x}. \end{aligned}$$

Ricorda

Per controllare di non aver dimenticato un prodotto, conta i termini del polinomio: ciascuno deve essere moltiplicato una volta.

11 Prodotto tra polinomi

Ogni termine del primo polinomio deve moltiplicare **tutti** i termini del secondo. Infine si riducono gli eventuali termini simili.

Esempio

$$\begin{aligned}(x+2)(x+3) &= x\cdot x + x\cdot 3 + 2\cdot x + 2\cdot 3\\ &= x^2+3x+2x+6\\ &= \boxed{x^2+5x+6}.\end{aligned}$$

Esempio

$$\begin{aligned}(2x-1)(x^2+3x-4) &= 2x^3+6x^2-8x-x^2-3x+4\\ &= \boxed{2x^3+5x^2-11x+4}.\end{aligned}$$

Attenzione

Non basta moltiplicare i primi termini e gli ultimi: in $(a+b)(c+d)$ ci sono **quattro prodotti**: $ac+ad+bc+bd$.

12 Prodotti notevoli fondamentali

I **prodotti notevoli** sono sviluppi che si incontrano spesso. Non sono regole nuove: derivano dalla proprietà distributiva. Prima capisci lo sviluppo, poi usa la formula per velocizzare i calcoli.

12.1 Quadrato di una somma

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}.$$

Esempio

$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= (x+3)(x+3)\\ &= x^2+3x+3x+9 = \boxed{x^2+6x+9}.\end{aligned}$$

12.2 Quadrato di una differenza

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2}.$$

Esempio

$$(2x-5)^2 = (2x)^2-2(2x)(5)+5^2 = \boxed{4x^2-20x+25}.$$

Attenzione

Errore frequente: $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$. Manca il **doppio prodotto** $2ab$. Anche $(a-b)^2$ termina con $+b^2$, non con $-b^2$.

12.3 Somma per differenza

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}.$$

I due termini misti si annullano: $-ab + ab = 0$.

Esempio

$$(3x+2)(3x-2) = (3x)^2 - 2^2 = \boxed{9x^2 - 4}.$$

12.4 Cubo di una somma

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}.$$

Esempio

$$(x+2)^3 = x^3 + 3x^2(2) + 3x(2^2) + 2^3 = \boxed{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}.$$

12.5 Cubo di una differenza

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}.$$

Esempio

$$(x-2)^3 = x^3 - 3x^2(2) + 3x(2^2) - 2^3 = \boxed{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}.$$

Ricorda

Nel cubo di una differenza i segni **alternano**: $+, -, +, -$. Per ricostruire una formula dimenticata, sviluppa il prodotto usando la distributiva.

13 Errori tipici da evitare

Attenzione

1. Sommare monomi non simili: $2x + 3x^2 \neq 5x^3$.
2. Confondere le regole delle potenze: $x^2 \cdot x^3 = x^5$, mentre $(x^2)^3 = x^6$.
3. Dimenticare il segno meno davanti alle parentesi: $-(x-4) = -x + 4$.
4. Dimenticare prodotti nella distributiva: $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$.
5. Dimenticare il doppio prodotto: $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$.
6. Assegnare il grado prima di ridurre i termini simili.
7. Pensare che dividere due monomi dia sempre un monomio.

14 Esercizi svolti

Svolto 1 — Riduzione di monomi

Riduci $5a^2b - 8a^2b + 4ab^2 + 3a^2b$. I termini in a^2b sono simili:

$$(5 - 8 + 3)a^2b + 4ab^2 = \boxed{4ab^2}.$$

Svolto 2 — Operazioni tra monomi

Calcola $(-3x^2y)(2xy^3)$ e $18a^5b^3 : (-6a^2b)$:

$$(-3x^2y)(2xy^3) = \boxed{-6x^3y^4}, \qquad \frac{18a^5b^3}{-6a^2b} = \boxed{-3a^3b^2}.$$

Svolto 3 — Espressione con polinomi

Semplifica $2x(x-3) - (x-2)(x+1)$:

$$\begin{aligned} &2x^2 - 6x - (x^2 - x - 2) \\ &= 2x^2 - 6x - x^2 + x + 2 = \boxed{x^2 - 5x + 2}. \end{aligned}$$

Svolto 4 — Prodotto notevole

Sviluppa $(2x-3)^2 - (x+1)(x-1)$:

$$\begin{aligned} &4x^2 - 12x + 9 - (x^2 - 1) \\ &= \boxed{3x^2 - 12x + 10}. \end{aligned}$$

Svolto 5 — Cubo

Sviluppa $(x-2)^3$ con la formula:

$$x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 4 - 8 = \boxed{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}.$$

15 Esercizi finali

Esercizio

Facile **1. Riconosci i monomi**
Quali sono monomi? a) $-3x^2y$; b) $5/x$; c) $\sqrt{x}$; d) 7; e) $2x^0y^3$.

Esercizio

Facile **2. Coefficiente e grado**
Per $-4a^3b^2$, indica coefficiente, parte letterale, grado complessivo e grado rispetto a b.

Esercizio

Facile **3. Monomi simili**
Tra $2x^2y$, $-5x^2y$, $2xy^2$, $-2x^2y$, individua i monomi simili e una coppia di opposti.

Esercizio

Facile **4. Riduci**
$7ab - 3ab + 2a^2b - 5ab$.

Esercizio

Facile **5. Moltiplica**
$(-2x^3y)(-4xy^2)$.

Esercizio

Medio **6. Dividi**
$24a^6b^4 : (-8a^2b^3)$. Specifica quando il divisore è diverso da zero.

Esercizio

Medio **7. Potenze**
$(-3a^2b)^2$ e $(-2xy^2)^3$.

Esercizio

Facile **8. Riduci e determina il grado**
$4x^3 - 2x + 7 - 4x^3 + 5x - 1$.

Esercizio

Medio **9. Somma e differenza**
Dati $A = 3x^2 - 2x + 1$ e $B = x^2 + 4x - 5$, calcola $A + B$ e $A - B$.

Esercizio

Medio **10. Distributiva**
$-3x(2x^2 - x + 4)$.

Esercizio

Medio **11. Prodotto di binomi**
$(2x + 3)(x - 4)$.

Esercizio

Medio **12. Prodotto tra polinomi**
$(x^2 + 2x - 1)(x + 3)$.

Esercizio

Medio **13. Quadrato di binomio**
$(3x + 2)^2$ e $(2x - 5)^2$.

Esercizio

Medio **14. Somma per differenza**
$(5a - 3b)(5a + 3b)$.

Esercizio

Difficile **15. Cubi**
$(x + 2)^3$ e $(2x - 1)^3$.

Esercizio

Difficile **16. Espressione mista**
$(x + 3)^2 - (x - 2)(x + 2) - 4x$.

Esercizio

Difficile **17. Grado dopo la riduzione**
$2x^4 - x^3 + 5x - 2x^4 + 3x^3 - 5x + 1$.

Esercizio

Difficile **18. Prodotto notevole e riduzione**
$(2a - b)^2 - (a + b)(a - b)$.

16 Soluzioni degli esercizi finali

1. Riconosci i monomi

a), d), e). In e), per convenzione algebrica x^0 rappresenta il monomio costante 1, dunque $2x^0y^3 = 2y^3$.

2. Coefficiente e grado

Coefficiente -4; parte letterale a^3b^2; grado totale $3+2=5$; grado rispetto a b: 2.

3. Monomi simili

$2x^2y$, $-5x^2y$ e $-2x^2y$ sono simili; $2x^2y$ e $-2x^2y$ sono opposti.

4. Riduci

$(7-3-5)ab + 2a^2b = \boxed{-ab + 2a^2b}$.

5. Moltiplica

$(-2)(-4)x^{3+1}y^{1+2} = \boxed{8x^4y^3}$.

6. Dividi

$24 : (-8) = -3$, $a^{6-2} = a^4$, $b^{4-3} = b$: $\boxed{-3a^4b}$. Il divisore $-8a^2b^3$ è non nullo se $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

7. Potenze

$(-3a^2b)^2 = \boxed{9a^4b^2}$; $(-2xy^2)^3 = \boxed{-8x^3y^6}$.

8. Riduci e determina il grado

$4x^3 - 4x^3 + (-2+5)x + (7-1) = \boxed{3x+6}$. Grado 1.

9. Somma e differenza

$A + B = \boxed{4x^2 + 2x - 4}$; $A - B = \boxed{2x^2 - 6x + 6}$.

10. Distributiva

$-3x(2x^2 - x + 4) = \boxed{-6x^3 + 3x^2 - 12x}$.

11. Prodotto di binomi

$2x^2 - 8x + 3x - 12 = \boxed{2x^2 - 5x - 12}$.

12. Prodotto tra polinomi

$x^3 + 3x^2 + 2x^2 + 6x - x - 3 = \boxed{x^3 + 5x^2 + 5x - 3}$.

13. Quadrato di binomio

$(3x+2)^2 = \boxed{9x^2 + 12x + 4}$; $(2x-5)^2 = \boxed{4x^2 - 20x + 25}$.

14. Somma per differenza

$(5a)^2 - (3b)^2 = \boxed{25a^2 - 9b^2}$.

15. Cubi

$(x+2)^3 = \boxed{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$; $(2x-1)^3 = \boxed{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}$.

16. Espressione mista

$(x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 4) - 4x = \boxed{2x + 13}$.

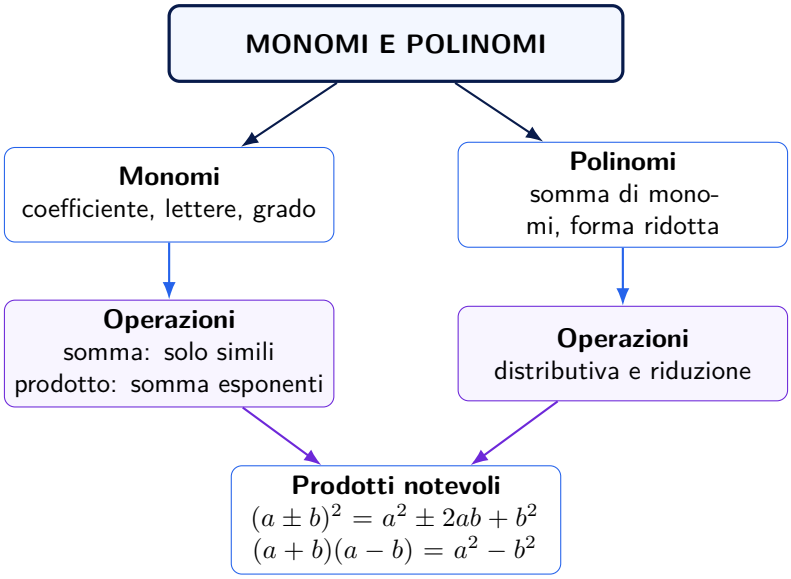
17. Grado dopo la riduzione

$2x^4 - 2x^4 - x^3 + 3x^3 + 5x - 5x + 1 = \boxed{2x^3 + 1}$; grado 3.

18. Prodotto notevole e riduzione

$(4a^2 - 4ab + b^2) - (a^2 - b^2) = \boxed{3a^2 - 4ab + 2b^2}$.

17 Mappa riassuntiva



Ti è piaciuta questa scheda?
Sul sito trovi altre risorse gratuite di fisica e matematica: teoria, esempi, esercizi e soluzioni pensati per studiare meglio, con passaggi chiari e spiegazioni accessibili.

STEMPower
www.progettostempower.it
Instagram: @stem_power_