MATEMATICA

Scheda 02

Le equazioni di primo grado:

definizione, principi di equivalenza e risoluzione

Teoria | Esempi | Esercizi | Soluzioni

Una guida chiara per imparare a risolvere le equazioni di primo grado e a comprendere il significato delle operazioni che permettono di trovare l'incognita.

Indice

1 Che cos'è un'equazione? 2
1.1 Membri, termini e incognita . . . 2
1.2 Soluzione e insieme di definizione . . . 2

2 Identità ed equazioni 2

3 Equazioni equivalenti 3
3.1 La metafora della bilancia . . . 3

4 I principi di equivalenza 3
4.1 Primo principio . . . 3
4.2 La regola del trasporto . . . 3
4.3 Secondo principio . . . 4

5 Forma normale di un'equazione di primo grado 4

6 Metodo generale di risoluzione 4

7 Equazioni con frazioni 7
7.1 Denominatori numerici . . . 7

8 Equazioni determinate, impossibili e indeterminate 7
8.1 Equazione determinata . . . 7
8.2 Equazione impossibile . . . 7
8.3 Equazione indeterminata . . . 8

9 Verifica della soluzione 9

10 Problemi risolvibili con un'equazione 9
10.1 Metodo . . . 9

11 Formule inverse 10
11.1 Esempio: velocità media . . . 10
11.2 Esempio: secondo principio della dinamica . . . 10

12 Errori comuni 11
12.1 Cambiare segno senza cambiare membro . . . 11
12.2 Dividere un solo termine . . . 11
12.3 Sbagliare la distributiva . . . 11
12.4 Perdere il segno meno davanti alla parentesi . . . 11

13 Strategia di controllo rapido 11

14 Esercizi 12

15 Soluzioni 14

16 Mappa riassuntiva 17

1 Che cos'è un'equazione?

Un'equazione è un'uguaglianza tra due espressioni algebriche che contiene una o più lettere, dette **incognite**. L'uguaglianza non è necessariamente vera per ogni valore dell'incognita: il nostro compito è trovare i valori che la rendono vera.

Per esempio:

$$2x + 3 = 11.$$

L'uguaglianza è vera soltanto per $x = 4$, perché:

$$2 \cdot 4 + 3 = 8 + 3 = 11.$$

Ricorda

Risolvere un'equazione significa trovare l'insieme di tutti i valori dell'incognita che trasformano l'equazione in un'uguaglianza vera.

1.1 Membri, termini e incognita

Nell'equazione

$$3x - 5 = 2x + 7$$

si distinguono:

- il **primo membro**, a sinistra del segno di uguale: $3x - 5$;
- il **secondo membro**, a destra: $2x + 7$;
- l'**incognita**: x;
- i **termini noti**: -5 e 7;
- i termini contenenti l'incognita: $3x$ e $2x$.

1.2 Soluzione e insieme di definizione

Nelle equazioni intere di primo grado considerate in questa scheda, l'incognita può assumere qualsiasi valore reale. L'insieme delle possibili soluzioni è quindi $\mathbb{R}$.

2 Identità ed equazioni

Un'**identità** è un'uguaglianza vera per ogni valore ammesso della lettera. Per esempio:

$$2(x + 1) = 2x + 2.$$

Un'equazione, invece, è vera soltanto per alcuni valori, oppure per nessuno.

Esempio

Consideriamo:

$$3x + 6 = 3(x + 2).$$

Sviluppando il secondo membro otteniamo:

$$3x + 6 = 3x + 6.$$

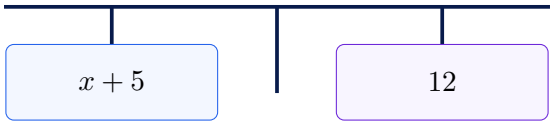
L'uguaglianza è vera per ogni $x \in \mathbb{R}$: è un'identità.

3 Equazioni equivalenti

Due equazioni sono **equivalenti** quando hanno lo stesso insieme di soluzioni. Durante la risoluzione trasformiamo l'equazione iniziale in equazioni sempre più semplici, ma dobbiamo conservare le soluzioni.

3.1 La metafora della bilancia

Un'equazione può essere immaginata come una bilancia in equilibrio. Se aggiungiamo, togliamo, moltiplichiamo o dividiamo entrambi i piatti per la stessa quantità ammessa, l'equilibrio si conserva.



sottraggo 5 da entrambi i membri

4 I principi di equivalenza

4.1 Primo principio

Aggiungendo o sottraendo la stessa espressione a entrambi i membri si ottiene un'equazione equivalente:

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad A + C = B + C.$$

Esempio

$$x + 7 = 15.$$

Sottraiamo 7 a entrambi i membri:

$$x + 7 - 7 = 15 - 7,$$

quindi

$$\boxed{x = 8}.$$

4.2 La regola del trasporto

Dire che un termine "passa dall'altra parte cambiando segno" è una scorciatoia pratica, ma dietro c'è sempre il primo principio.

Da

$$3x - 5 = 10$$

possiamo scrivere direttamente

$$3x = 10 + 5,$$

ma ciò significa, in realtà, che abbiamo aggiunto 5 a entrambi i membri.

Attenzione

Il termine non cambia segno per magia. Il cambio di segno deriva dall'aver compiuto la stessa addizione o sottrazione su entrambi i membri.

4.3 Secondo principio

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri per lo stesso numero non nullo si ottiene un'equazione equivalente:

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad kA = kB, \qquad k \neq 0.$$

Esempio

$$5x = 35.$$

Dividiamo entrambi i membri per 5:

$$\frac{5x}{5} = \frac{35}{5},$$

quindi

$$\boxed{x = 7}.$$

Attenzione

Non si può dividere per zero. Inoltre, quando si divide per un'espressione contenente l'incognita, bisogna accertarsi che quell'espressione non sia nulla: altrimenti si rischia di perdere soluzioni.

5 Forma normale di un'equazione di primo grado

Un'equazione di primo grado in un'incognita, dopo le opportune semplificazioni, può essere ricondotta alla forma:

$$\boxed{ax = b}, \qquad a \neq 0,$$

dove a e b sono numeri reali.

La soluzione è:

$$\boxed{x = \frac{b}{a}}.$$

L'equazione si dice di primo grado perché l'incognita compare con esponente massimo uguale a 1. I casi in cui, dopo le semplificazioni, il coefficiente dell'incognita si annulla vengono analizzati separatamente come equazioni impossibili o indeterminate.

6 Metodo generale di risoluzione

Per risolvere un'equazione di primo grado conviene seguire sempre lo stesso ordine.

1. Eliminare parentesi e prodotti indicati.
2. Se ci sono denominatori numerici, eliminarli moltiplicando entrambi i membri per il minimo comune multiplo.
3. Ridurre i termini simili in ciascun membro.
4. Portare i termini con l'incognita in un membro e i termini noti nell'altro.
5. Ridurre nuovamente.
6. Dividere per il coefficiente dell'incognita.
7. Verificare la soluzione nell'equazione iniziale.

Ricorda

Non esiste l'obbligo di portare le x a sinistra. Si può scegliere il membro che rende i calcoli più semplici, purché si applichino correttamente i principi di equivalenza.

Equazioni semplici

Esempio

Risolviamo:

$$4x - 9 = 19.$$

Aggiungiamo 9 ai due membri:

$$4x = 28.$$

Dividiamo per 4:

$$\boxed{x = 7}.$$

Verifica:

$$4 \cdot 7 - 9 = 28 - 9 = 19.$$

Esempio

Risolviamo:

$$7 - 3x = 22.$$

Sottraiamo 7:

$$-3x = 15.$$

Dividiamo per -3:

$$\boxed{x = -5}.$$

Incognita in entrambi i membri

Esempio

$$5x - 4 = 2x + 11.$$

Portiamo i termini con x a sinistra e i termini noti a destra:

$$5x - 2x = 11 + 4.$$

Riduciamo:

$$3x = 15,$$

quindi

$$\boxed{x = 5}.$$

Esempio

$$3 - 2x = 5x + 17.$$

Portiamo le incognite a sinistra:

$$-2x - 5x = 17 - 3.$$

Otteniamo:

$$-7x = 14,$$

quindi

$$\boxed{x = -2}.$$

Equazioni con parentesi

Prima si eliminano le parentesi applicando correttamente la proprietà distributiva.

Esempio

$$3(x - 2) + 5 = 2x + 9.$$

Sviluppiamo:

$$3x - 6 + 5 = 2x + 9.$$

Riduciamo:

$$3x - 1 = 2x + 9.$$

Portiamo $2x$ a sinistra e -1 a destra:

$$x = 10.$$

Quindi:

$$\boxed{x = 10}.$$

Attenzione

Quando davanti a una parentesi c'è il segno meno, cambiano i segni di *tutti* i termini contenuti nella parentesi:

$$-(2x - 3) = -2x + 3.$$

Esempio

$$4 - (2x - 3) = 3(x + 1).$$

Eliminiamo le parentesi:

$$4 - 2x + 3 = 3x + 3.$$

Riduciamo:

$$7 - 2x = 3x + 3.$$

Da cui:

$$-5x = -4,$$

quindi

$$\boxed{x = \frac{4}{5}}.$$

7 Equazioni con frazioni

7.1 Denominatori numerici

Quando i denominatori sono numeri, si calcola il minimo comune multiplo e si moltiplicano entrambi i membri per esso.

Esempio

$$\frac{x}{3} + \frac{x-1}{2} = 4.$$

Il minimo comune multiplo tra 3 e 2 è 6. Moltiplichiamo tutto per 6:

$$2x + 3(x-1) = 24.$$

Sviluppiamo:

$$2x + 3x - 3 = 24.$$

Quindi:

$$5x = 27,$$

e infine

$$\boxed{x = \frac{27}{5}}.$$

8 Equazioni determinate, impossibili e indeterminate

Dopo le semplificazioni possiamo ottenere tre casi diversi.

8.1 Equazione determinata

Se si arriva a:

$$ax = b, \qquad a \neq 0,$$

esiste una sola soluzione:

$$x = \frac{b}{a}.$$

8.2 Equazione impossibile

Se l'incognita scompare e resta un'uguaglianza falsa, l'equazione non ha soluzioni.

Esempio

$$2(x+1) = 2x + 5.$$

Sviluppando:

$$2x + 2 = 2x + 5.$$

Sottraendo $2x$:

$$2 = 5,$$

che è falso. Dunque:

$$\boxed{S = \varnothing}.$$

8.3 Equazione indeterminata

Se l'incognita scompare e resta un'uguaglianza vera, ogni valore ammesso è soluzione.

Esempio

$$3(x-2) = 3x - 6.$$

Sviluppando:

$$3x - 6 = 3x - 6.$$

Si ottiene un'identità. Dunque:

$$\boxed{S = R}.$$

Caso finale	Significato	Soluzioni
$ax = b$, $a \neq 0$	equazione determinata	una soluzione: $x = b/a$
$0x = b$, $b \neq 0$	uguaglianza falsa	nessuna soluzione
$0x = 0$	uguaglianza sempre vera	infinite soluzioni

9 Verifica della soluzione

Per controllare una soluzione, la si sostituisce nell'equazione iniziale. Se i due membri assumono lo stesso valore, la soluzione è corretta.

Esempio

Per l'equazione

$$3x + 2 = 17$$

abbiamo trovato $x = 5$. Verifichiamo:

$$3 \cdot 5 + 2 = 15 + 2 = 17.$$

Il primo membro coincide con il secondo: la soluzione è corretta.

10 Problemi risolvibili con un'equazione

Il passaggio più importante non è il calcolo, ma la traduzione del testo in linguaggio matematico.

10.1 Metodo

1. Scegliere l'incognita e dichiarare cosa rappresenta.
2. Tradurre ogni informazione in un'espressione.
3. Costruire l'equazione.
4. Risolverla.
5. Controllare che la soluzione sia compatibile con il problema.
6. Scrivere la risposta con parole e, se necessario, unità di misura.

Esempio

La somma di un numero e del suo doppio è 42. Qual è il numero?
Indichiamo con x il numero. Il suo doppio è $2x$. L'equazione è:

$$x + 2x = 42.$$

Quindi:

$$3x = 42,$$

$$\boxed{x = 14}.$$

Verifica: $14 + 28 = 42$.

Esempio

Un rettangolo ha perimetro 54 cm e la base è lunga 5 cm più dell'altezza. Trova le dimensioni. Poniamo $h = x$ e $b = x + 5$. Dal perimetro:

$$2b + 2h = 54.$$

Sostituiamo:

$$2(x + 5) + 2x = 54.$$

$$2x + 10 + 2x = 54,$$

$$4x = 44,$$

$$x = 11.$$

Quindi:

$$h = 11\,\text{cm}, \qquad b = 16\,\text{cm}.$$

11 Formule inverse

In fisica e nelle scienze si usano spesso formule contenenti più grandezze. Ricavare una formula inversa significa isolare la grandezza desiderata applicando gli stessi principi usati nelle equazioni.

11.1 Esempio: velocità media

Dalla formula

$$v = \frac{s}{t}$$

ricaviamo lo spazio moltiplicando entrambi i membri per t:

$$\boxed{s = vt}.$$

Per ricavare il tempo:

$$vt = s,$$

poi dividiamo per v:

$$\boxed{t = \frac{s}{v}}.$$

11.2 Esempio: secondo principio della dinamica

Dalla formula

$$F = ma$$

si ricavano:

$$\boxed{a = \frac{F}{m}}, \qquad \boxed{m = \frac{F}{a}}.$$

Attenzione

Non usare il "triangolino delle formule" come unica strategia. Funziona soltanto per relazioni molto semplici e rischia di nascondere il ragionamento. I principi di equivalenza, invece, funzionano sempre.

12 Errori comuni

12.1 Cambiare segno senza cambiare membro

Da

$$3x - 4 = 8$$

non si può scrivere $3x + 4 = 8$. Se -4 viene spostato, deve comparire nell'altro membro come $+4$:

$$3x = 8 + 4.$$

12.2 Dividere un solo termine

Da

$$2x + 6 = 10$$

non si può dividere soltanto $2x$ per 2. Una divisione applicata a un membro deve riguardare l'intero membro:

$$\frac{2x + 6}{2} = \frac{10}{2}.$$

Più semplicemente, conviene prima sottrarre 6.

12.3 Sbagliare la distributiva

$$3(x + 2) = 3x + 6,$$

non $3x + 2$.

12.4 Perdere il segno meno davanti alla parentesi

$$-(x - 5) = -x + 5,$$

non $-x - 5$.

13 Strategia di controllo rapido

Dopo aver risolto un'equazione, chiediti:

- ho eliminato correttamente le parentesi?
- ho applicato la stessa operazione a entrambi i membri?
- ho rispettato i segni?
- la soluzione verifica l'equazione iniziale?

14 Esercizi

Esercizio

Facile **1.** Risolvi:

$$3x + 5 = 20.$$

Esercizio

Facile **2.** Risolvi:

$$7 - 2x = 15.$$

Esercizio

Facile **3.** Risolvi:

$$5x - 8 = 2x + 13.$$

Esercizio

Medio **4.** Risolvi:

$$4(x - 3) + 2 = 2x + 10.$$

Esercizio

Medio **5.** Risolvi:

$$3 - (2x - 5) = 4(x + 1).$$

Esercizio

Medio **6.** Risolvi:

$$0{,}6x - 1{,}2 = 2{,}4.$$

Esercizio

Medio **7.** Risolvi:

$$\frac{x}{4} + \frac{x - 2}{3} = 5.$$

Esercizio

Medio **8.** Classifica e risolvi:

$$2(3x - 1) = 6x - 2.$$

Esercizio

Medio **9.** Classifica e risolvi:

$$5(x + 2) = 5x + 7.$$

Esercizio

Difficile **10.** Risolvi:

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{x+2}{4} = \frac{5}{6}.$$

Esercizio

Medio **11.** La somma di tre numeri consecutivi è 72. Trovali.

Esercizio

Difficile **12.** Un numero diminuito del 20% è uguale a 56. Trova il numero iniziale.

Esercizio

Medio **13.** Dalla formula $P = 2a + 2b$, ricava b.

Esercizio

Difficile **14.** Dalla formula

$$E = \frac{1}{2}mv^2,$$

ricava m.

Esercizio

Difficile **15.** Il perimetro di un triangolo isoscele è 48 cm. Ciascun lato obliquo misura 6 cm più della base. Trova le lunghezze dei lati.

15 Soluzioni

1.

$$3x + 5 = 20$$
$$3x = 15$$
$$\boxed{x = 5}.$$

2.

$$7 - 2x = 15$$
$$-2x = 8$$
$$\boxed{x = -4}.$$

3.

$$5x - 8 = 2x + 13$$
$$5x - 2x = 13 + 8$$
$$3x = 21$$
$$\boxed{x = 7}.$$

4.

$$4(x - 3) + 2 = 2x + 10$$
$$4x - 12 + 2 = 2x + 10$$
$$4x - 10 = 2x + 10$$
$$2x = 20$$
$$\boxed{x = 10}.$$

5.

$$3 - (2x - 5) = 4(x + 1)$$
$$3 - 2x + 5 = 4x + 4$$
$$8 - 2x = 4x + 4$$
$$-6x = -4$$
$$\boxed{x = \frac{2}{3}}.$$

6.

$$0{,}6x - 1{,}2 = 2{,}4.$$

Moltiplichiamo per 10:

$$6x - 12 = 24$$
$$6x = 36$$
$$\boxed{x = 6}.$$

7.

$$\frac{x}{4} + \frac{x-2}{3} = 5.$$

Il minimo comune multiplo è 12:

$$3x + 4(x-2) = 60$$

$$3x + 4x - 8 = 60$$

$$7x = 68$$

$$\boxed{x = \frac{68}{7}}.$$

8.

$$2(3x-1) = 6x - 2$$

$$6x - 2 = 6x - 2.$$

L'uguaglianza è vera per ogni x:

$$\boxed{S = \mathbb{R}}.$$

L'equazione è indeterminata.

9.

$$5(x+2) = 5x + 7$$

$$5x + 10 = 5x + 7$$

$$10 = 7.$$

L'uguaglianza è falsa:

$$\boxed{S = \varnothing}.$$

L'equazione è impossibile.

10.

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{x+2}{4} = \frac{5}{6}.$$

Il minimo comune multiplo tra 3, 4 e 6 è 12. Moltiplichiamo entrambi i membri per 12:

$$4(2x-1) - 3(x+2) = 10.$$

Sviluppiamo:

$$8x - 4 - 3x - 6 = 10.$$

Riduciamo:

$$5x - 10 = 10,$$

quindi

$$5x = 20$$

e infine

$$\boxed{x = 4}.$$

11.

Indichiamo i tre numeri consecutivi con x, $x+1$ e $x+2$:

$$x + (x+1) + (x+2) = 72.$$

$$3x + 3 = 72$$

$$3x = 69$$

$$x = 23.$$

I numeri sono:

$$\boxed{23,\ 24,\ 25}.$$

12.

Diminuito del 20% significa che resta l'80% del numero:

$$0{,}8x = 56.$$

$$x = \frac{56}{0{,}8} = 70.$$

Quindi il numero iniziale è:

$$\boxed{70}.$$

13.

$$P = 2a + 2b.$$

Sottraiamo $2a$:

$$P - 2a = 2b.$$

Dividiamo per 2:

$$\boxed{b = \frac{P-2a}{2} = \frac{P}{2} - a}.$$

14.

$$E = \frac{1}{2}mv^2.$$

Moltiplichiamo per 2:

$$2E = mv^2.$$

Dividiamo per v^2, con $v \neq 0$:

$$\boxed{m = \frac{2E}{v^2}}.$$

15.

Indichiamo la base con x. Ogni lato obliquo misura $x+6$. Il perimetro è:

$$x + (x+6) + (x+6) = 48.$$

$$3x + 12 = 48$$

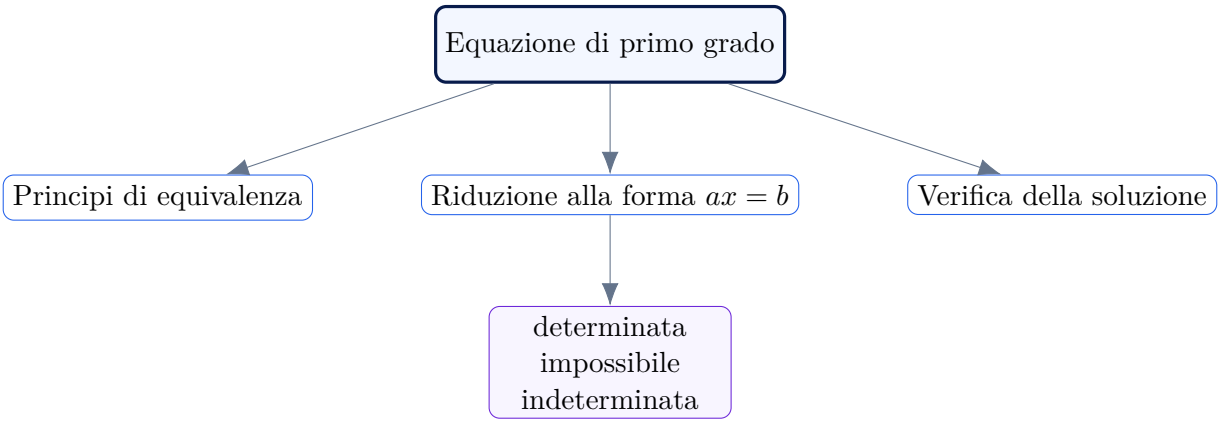
$$3x = 36$$

$$x = 12.$$

La base misura 12 cm e ciascun lato obliquo misura 18 cm:

$$\boxed{12\,\text{cm},\ 18\,\text{cm},\ 18\,\text{cm}}.$$

16 Mappa riassuntiva



Ricorda

Il vero obiettivo non è memorizzare il "cambio di segno", ma imparare a mantenere l'equilibrio dell'uguaglianza. Una volta compresi i principi di equivalenza, anche formule inverse ed equazioni più complesse diventano molto più gestibili.

Ti è piaciuta questa scheda?
Sul sito trovi altre risorse gratuite di fisica e matematica: teoria, esempi, esercizi e soluzioni pensati per studiare meglio, senza perdersi tra formule scritte male e spiegazioni inutilmente complicate.

STEMPower
www.progettostempower.it
Instagram: @stem_power_