MATEMATICA

Scheda 01

Le potenze

Proprietà, esponenti e calcolo

Teoria | Esempi | Esercizi | Soluzioni

Una guida chiara per imparare ad interpretare una potenza, applicare correttamente le proprietà, gestire basi negative ed esponenti nulli o negativi, trasformare potenze in frazioni e risolvere espressioni evitando gli errori più frequenti.

Indice

1 Che cos'è una potenza? 2
1.1 Lettura delle potenze . . . 2

2 Casi particolari 2
2.1 Esponente uno . . . 2
2.2 Esponente zero . . . 2
2.3 Base uno e base zero . . . 3
2.4 Potenze di dieci . . . 3

3 Il segno di una potenza 3
3.1 Il ruolo delle parentesi . . . 3

4 Prodotto di potenze con la stessa base 4

5 Quoziente di potenze con la stessa base 4

6 Potenza di una potenza 4

7 Potenza di un prodotto e di un quoziente 5
7.1 Stesso esponente, basi diverse . . . 5

8 Proprietà che non esistono 5

9 Esponenti negativi 6
9.1 Potenze di dieci con esponente negativo . . . 6

10 Esponenti frazionari e radici 6

11 Ordine delle operazioni 7

12 Come semplificare un'espressione con potenze 7

13 Collegamento con la notazione scientifica 8

14 Errori comuni 9

15 Esercizi 10

16 Soluzioni commentate 13

17 Mappa finale 16

1 Che cos'è una potenza?

Una potenza è una scrittura compatta che rappresenta una moltiplicazione ripetuta di fattori uguali. Se a è un numero e n è un intero positivo, si definisce:

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fattori}}}$$

Il numero a si chiama **base**; il numero n si chiama **esponente**.

Esempio

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$$

La base è 3, l'esponente è 4 e il valore della potenza è 81.

Attenzione

L'esponente indica quante volte la base compare come fattore, non per quanto bisogna moltiplicarla. Perciò:

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125,$$

non $5 \cdot 3 = 15$.

1.1 Lettura delle potenze

Una potenza si legge generalmente "a elevato alla n". Alcuni esponenti hanno nomi tradizionali:

- a^2: "a al quadrato";
- a^3: "a al cubo";
- a^4: "a alla quarta".

2 Casi particolari

2.1 Esponente uno

Per ogni numero a:

$$\boxed{a^1 = a}.$$

2.2 Esponente zero

Per ogni numero $a \neq 0$:

$$\boxed{a^0 = 1}.$$

Questa regola non è arbitraria: deriva dalla proprietà del quoziente di potenze con la stessa base:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0.$$

Ma, poiché ogni numero non nullo diviso per se stesso vale 1, deve essere $a^0 = 1$.

Attenzione

La scrittura 0^0 non viene trattata come una normale potenza: in molti contesti è considerata una forma indeterminata o non definita. Non si può applicare automaticamente la regola dell'esponente zero.

2.3 Base uno e base zero

Per ogni esponente positivo n:

$$1^n = 1, \qquad 0^n = 0.$$

2.4 Potenze di dieci

Le potenze di dieci sono fondamentali in matematica e nelle scienze:

$$10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000, \quad 10^4 = 10000.$$

Con esponente positivo, il numero di zeri è uguale all'esponente.

3 Il segno di una potenza

Quando la base è positiva, la potenza è sempre positiva. Quando la base è negativa, il segno dipende dalla parità dell'esponente:

- esponente **pari**: risultato positivo;
- esponente **dispari**: risultato negativo.

$$(-2)^4 = 16, \qquad (-2)^5 = -32.$$

Questo accade perché ogni coppia di fattori negativi produce un fattore positivo.

Ricorda

$$(-a)^{\text{pari}} > 0, \qquad (-a)^{\text{dispari}} < 0.$$

3.1 Il ruolo delle parentesi

Le parentesi sono decisive:

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9,$$

mentre

$$-3^2 = -(3^2) = -9.$$

Nel secondo caso l'esponente riguarda soltanto il 3; il segno meno resta fuori dalla potenza.

Attenzione

$$(-4)^2 \neq -4^2.$$

Il primo risultato è 16, il secondo è -16. Le parentesi non sono decorative: stabiliscono quale numero costituisce la base.

4 Prodotto di potenze con la stessa base

Moltiplicando potenze con la stessa base, si mantiene la base e si sommano gli esponenti:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}.$$

Infatti:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdots a}_{m \text{ fattori}} \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ fattori}} = a^{m+n}.$$

Esempio

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256.$$

Non bisogna moltiplicare gli esponenti.

5 Quoziente di potenze con la stessa base

Dividendo potenze con la stessa base, si mantiene la base e si sottraggono gli esponenti:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}, \qquad a \neq 0.$$

Esempio

$$\frac{7^6}{7^2} = 7^{6-2} = 7^4 = 2401.$$

La condizione $a \neq 0$ è necessaria perché non è possibile dividere per zero.

6 Potenza di una potenza

Elevando una potenza a un'altra potenza, si mantiene la base e si moltiplicano gli esponenti:

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}.$$

Esempio

$$\left(3^2\right)^4 = 3^{2\cdot 4} = 3^8 = 6561.$$

Infatti $\left(3^2\right)^4 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2$.

Attenzione

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

non a^{m+n}. La somma degli esponenti si usa nel prodotto di potenze con la stessa base; qui gli esponenti si moltiplicano.

7 Potenza di un prodotto e di un quoziente

La potenza di un prodotto si distribuisce su ogni fattore:

$$\boxed{(ab)^n = a^n b^n}.$$

Analogamente, se $b \neq 0$:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}.$$

Esempio

$$(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1000.$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}.$$

7.1 Stesso esponente, basi diverse

Le proprietà precedenti permettono anche di raccogliere un esponente comune:

$$a^n b^n = (ab)^n,$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Esempio

$$2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10000.$$

Questo procedimento è spesso più rapido che calcolare separatamente le due potenze.

8 Proprietà che non esistono

Le proprietà delle potenze valgono in situazioni precise. In particolare, una potenza non si distribuisce su una somma o una differenza:

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n,$$

$$(a-b)^n \neq a^n - b^n.$$

Esempio

Per $a = 2$, $b = 3$ e $n = 2$:

$$(2+3)^2 = 5^2 = 25,$$

mentre

$$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13.$$

I risultati sono diversi.

Attenzione

Non si possono combinare automaticamente potenze con basi ed esponenti diversi. Per esempio, $2^3 \cdot 3^4$ non si riduce usando una proprietà delle potenze: bisogna calcolare oppure trasformare l'espressione in altro modo.

9 Esponenti negativi

La proprietà del quoziente porta naturalmente agli esponenti negativi. Per $a \neq 0$ e $n > 0$:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}.$$

Un esponente negativo non rende necessariamente negativo il risultato: indica il reciproco della potenza con esponente positivo.

Esempio

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$
$$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}.$$

9.1 Potenze di dieci con esponente negativo

$$10^{-1} = 0{,}1, \qquad 10^{-2} = 0{,}01, \qquad 10^{-3} = 0{,}001.$$

In generale:

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}.$$

Queste potenze sono alla base della notazione scientifica per numeri molto piccoli.

Ricorda

Per cambiare il segno dell'esponente si può spostare la potenza dal numeratore al denominatore o viceversa:

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n, \qquad \frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^m}.$$

10 Esponenti frazionari e radici

Le potenze permettono di rappresentare anche le radici. Per n intero positivo:

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}.$$

Più in generale:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m}.$$

Nel campo dei numeri reali, se n è pari, si richiede $a \geq 0$.

Esempio

$$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4,$$
$$27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9.$$

Attenzione

$$16^{\frac{1}{2}} = 4,$$

non ± 4. La radice quadrata $\sqrt{16}$ indica la radice aritmetica non negativa. Il simbolo $\pm$ compare invece quando si risolve un'equazione come $x^2 = 16$.

11 Ordine delle operazioni

Nelle espressioni numeriche si segue questo ordine:

1. parentesi, procedendo dalle più interne;
2. potenze e radici;
3. moltiplicazioni e divisioni, da sinistra a destra;
4. addizioni e sottrazioni, da sinistra a destra.

Esempio

Calcoliamo:

$$3 + 2^3 \cdot 5 - 4.$$

Prima la potenza:

$$2^3 = 8.$$

Poi la moltiplicazione:

$$8 \cdot 5 = 40.$$

Infine addizione e sottrazione:

$$3 + 40 - 4 = 39.$$

12 Come semplificare un'espressione con potenze

Un metodo affidabile è il seguente:

1. individua le basi uguali;
2. controlla se l'operazione è un prodotto, un quoziente o una potenza di potenza;
3. applica una proprietà alla volta;
4. trasforma gli esponenti negativi solo quando è utile;
5. calcola il valore numerico alla fine, se richiesto;
6. verifica il segno e l'ordine di grandezza del risultato.

Esempio

Semplifichiamo:

$$\frac{(2^3)^4 \cdot 2^{-5}}{2^2}.$$

Potenza di potenza:

$$(2^3)^4 = 2^{12}.$$

Prodotto e quoziente con la stessa base:

$$\frac{2^{12} \cdot 2^{-5}}{2^2} = 2^{12-5-2} = 2^5 = 32.$$

Esempio

Semplifichiamo:

$$\frac{3^5 \cdot 2^5}{6^3}.$$

Raccogliamo l'esponente comune al numeratore:

$$3^5 \cdot 2^5 = (3 \cdot 2)^5 = 6^5.$$

Quindi:

$$\frac{6^5}{6^3} = 6^{5-3} = 6^2 = 36.$$

13 Collegamento con la notazione scientifica

Un numero in notazione scientifica ha la forma:

$$a \times 10^n, \qquad 1 \le |a| < 10.$$

Le proprietà delle potenze permettono di eseguire rapidamente prodotti e quozienti.

Esempio

$$(3 \times 10^4)(2 \times 10^3) = (3 \cdot 2) \times 10^{4+3} = 6 \times 10^7.$$

Esempio

$$\frac{8 \times 10^6}{4 \times 10^2} = \frac{8}{4} \times 10^{6-2} = 2 \times 10^4.$$

Curiosità

Le potenze non servono soltanto a scrivere numeri enormi. Compaiono nella crescita esponenziale, nel decadimento radioattivo, nell'informatica, nella probabilità, nella geometria e in moltissime leggi della fisica.

14 Errori comuni

! Errore 1: confondere potenza e prodotto

$$4^3 \neq 4 \cdot 3.$$

Il valore corretto è $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

! Errore 2: sommare gli esponenti in una potenza di potenza

$$(2^3)^4 \neq 2^7.$$

Il risultato corretto è 2^{12}.

! Errore 3: distribuire la potenza sulla somma

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2.$$

Infatti $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

! Errore 4: interpretare l'esponente negativo come segno meno

$$3^{-2} \neq -9.$$

Il risultato è $3^{-2} = 1/9$.

! Errore 5: ignorare le parentesi

$$-2^4 = -16, \qquad (-2)^4 = 16.$$

15 Esercizi

Esercizio

Esercizio 1 Facile

Scrivi come prodotto di fattori uguali e calcola:

$$a)\ 2^5 \qquad b)\ 4^3 \qquad c)\ (-3)^4 \qquad d)\ (-2)^5.$$

Esercizio

Esercizio 2 Facile

Indica base, esponente e segno del risultato:

$$a)\ (-5)^6 \qquad b)\ -5^6 \qquad c)\ (-7)^3 \qquad d)\ 10^0.$$

Esercizio

Esercizio 3 Facile

Calcola applicando le proprietà:

$$a)\ 3^4 \cdot 3^2 \qquad b)\ \frac{5^7}{5^3} \qquad c)\ (2^3)^4 \qquad d)\ 2^6 \cdot 5^6.$$

Esercizio

Esercizio 4 Facile

Riscrivi eliminando gli esponenti negativi e calcola.:

$$a)\ 2^{-4} \qquad b)\ 10^{-3} \qquad c)\ (-3)^{-2} \qquad d)\ \frac{1}{5^{-3}}.$$

Esercizio

Esercizio 5 Medio

Semplifica:

$$a)\ \frac{2^8 \cdot 2^3}{2^5} \qquad b)\ \frac{(3^2)^4}{3^5} \qquad c)\ 5^{-2} \cdot 5^7 \qquad d)\ \frac{7^3}{7^{-2}}.$$

Esercizio

Esercizio 6 Medio

Calcola:

$$a)\ 64^{1/2} \qquad b)\ 125^{1/3} \qquad c)\ 16^{3/4} \qquad d)\ 81^{-1/2}.$$

Esercizio

Esercizio 7 Medio

Stabilisci se le uguaglianze sono vere o false e correggi quelle false:

$$a)\ 2^3 + 2^4 = 2^7$$

$$b)\ (3^2)^5 = 3^{10}$$

$$c)\ (2+5)^2 = 2^2 + 5^2$$

$$d)\ \frac{4^6}{4^2} = 4^4.$$

Esercizio

Esercizio 8 Medio

Calcola rispettando l'ordine delle operazioni:

$$a)\ 5 + 2^4 \cdot 3 - 7$$

$$b)\ [3^2 + 2(5-1)]^2$$

$$c)\ 4^3 - 2^3 \cdot 7$$

$$d)\ \frac{2^6 - 2^4}{2^3}.$$

Esercizio

Esercizio 9 Medio

Esegui le operazioni in notazione scientifica:

$$a)\ (4 \times 10^5)(3 \times 10^2)$$

$$b)\ \frac{9 \times 10^8}{3 \times 10^3}$$

$$c)\ (2{,}5 \times 10^{-4})(4 \times 10^6).$$

Esprimi ogni risultato in notazione scientifica corretta.

Esercizio

Esercizio 10 Difficile

Semplifica completamente:

$$a)\ \frac{(2^3)^5 \cdot 2^{-4}}{2^6}$$

$$b)\ \frac{3^7 \cdot 9^2}{27^3}$$

$$c)\ \frac{4^5 \cdot 8^{-2}}{2^{-3}}.$$

Esercizio

Esercizio 11 **Difficile**

Semplifica, supponendo $a \neq 0$ e $b \neq 0$:

$$a)\ \frac{a^7 a^{-3}}{a^2} \qquad b)\ \frac{(a^2 b^3)^2}{a b^4} \qquad c)\ \left(\frac{a^{-2}}{b^3}\right)^{-2}.$$

Esercizio

Esercizio 12 **Difficile**

Trova il valore dell'esponente incognito:

$$a)\ 2^x \cdot 2^5 = 2^{12}$$

$$b)\ \frac{3^{10}}{3^x} = 3^4$$

$$c)\ (5^3)^x = 5^{15}$$

$$d)\ 10^x = 0{,}0001.$$

16 Soluzioni commentate

Esercizio 1

$$a)\ 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$b)\ 4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

$$c)\ (-3)^4 = 81$$

L'esponente è pari, quindi il risultato è positivo.

$$d)\ (-2)^5 = -32$$

L'esponente è dispari, quindi il risultato conserva il segno negativo della base.

Esercizio 2

- $(-5)^6$: base -5, esponente 6, risultato positivo.
- -5^6: la base della potenza è 5; il meno è esterno. Risultato negativo.
- $(-7)^3$: base -7, esponente 3, risultato negativo.
- 10^0: base 10, esponente 0, risultato 1.

Esercizio 3

$$a)\ 3^4 \cdot 3^2 = 3^6 = 729$$

$$b)\ \frac{5^7}{5^3} = 5^4 = 625$$

$$c)\ (2^3)^4 = 2^{12} = 4096$$

$$d)\ 2^6 \cdot 5^6 = (2 \cdot 5)^6 = 10^6 = 1000000.$$

Esercizio 4

$$a)\ 2^{-4} = \frac{1}{16} \qquad b)\ 10^{-3} = \frac{1}{1000}$$

$$c)\ (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9} \qquad d)\ \frac{1}{5^{-3}} = 5^3 = 125.$$

Esercizio 5

$$a)\ \frac{2^8 \cdot 2^3}{2^5} = 2^{8+3-5} = 2^6 = 64$$

$$b)\ \frac{(3^2)^4}{3^5} = 3^{8-5} = 3^3 = 27$$

$$c)\ 5^{-2} \cdot 5^7 = 5^5 = 3125$$

$$d)\ \frac{7^3}{7^{-2}} = 7^{3-(-2)} = 7^5 = 16807.$$

Esercizio 6

$$a)\ 64^{1/2} = \sqrt{64} = 8$$
$$b)\ 125^{1/3} = \sqrt[3]{125} = 5$$
$$c)\ 16^{3/4} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$$
$$d)\ 81^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9}.$$

Esercizio 7

- a) Falsa. La proprietà del prodotto di potenze con la stessa base non può essere applicata a una somma: $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$.
- b) Vera: $(3^2)^5 = 3^{2\cdot 5} = 3^{10}$.
- c) Falsa: $(2+5)^2 = 49$, mentre $2^2 + 5^2 = 29$.
- d) Vera: $4^{6-2} = 4^4$.

Esercizio 8

$$a)\ 5 + 2^4 \cdot 3 - 7 = 5 + 16 \cdot 3 - 7 = 46$$
$$b)\ [3^2 + 2(5-1)]^2 = [9+8]^2 = 17^2 = 289$$
$$c)\ 4^3 - 2^3 \cdot 7 = 64 - 8 \cdot 7 = 8$$
$$d)\ \frac{2^6 - 2^4}{2^3} = \frac{64 - 16}{8} = 6.$$

Esercizio 9

$$a)\ (4 \times 10^5)(3 \times 10^2) = 12 \times 10^7 = 1{,}2 \times 10^8$$
$$b)\ \frac{9 \times 10^8}{3 \times 10^3} = 3 \times 10^5$$
$$c)\ (2{,}5 \times 10^{-4})(4 \times 10^6) = 10 \times 10^2 = 1 \times 10^3.$$

Nel primo e nel terzo caso il coefficiente intermedio non era compreso tra 1 e 10, quindi è stato normalizzato.

Esercizio 10

$$a)\ \frac{(2^3)^5 \cdot 2^{-4}}{2^6} = 2^{15-4-6} = 2^5 = 32$$

Per il punto b), riscriviamo tutto in base 3:

$$9^2 = (3^2)^2 = 3^4, \qquad 27^3 = (3^3)^3 = 3^9.$$

Quindi:

$$b)\ \frac{3^7 \cdot 3^4}{3^9} = 3^{7+4-9} = 3^2 = 9.$$

Per il punto c), riscriviamo tutto in base 2:

$$4^5 = (2^2)^5 = 2^{10}, \qquad 8^{-2} = (2^3)^{-2} = 2^{-6}.$$

Allora:

$$c)\ \frac{2^{10} \cdot 2^{-6}}{2^{-3}} = 2^{10-6+3} = 2^7 = 128.$$

Esercizio 11

$$a)\ \frac{a^7a^{-3}}{a^2} = a^{7-3-2} = a^2$$

$$b)\ \frac{(a^2b^3)^2}{ab^4} = \frac{a^4b^6}{ab^4} = a^3b^2$$

$$c)\ \left(\frac{a^{-2}}{b^3}\right)^{-2} = \left(a^{-2}b^{-3}\right)^{-2} = a^4b^6.$$

Esercizio 12

Confrontiamo gli esponenti della stessa base:

$$a)\ x + 5 = 12 \Rightarrow x = 7$$

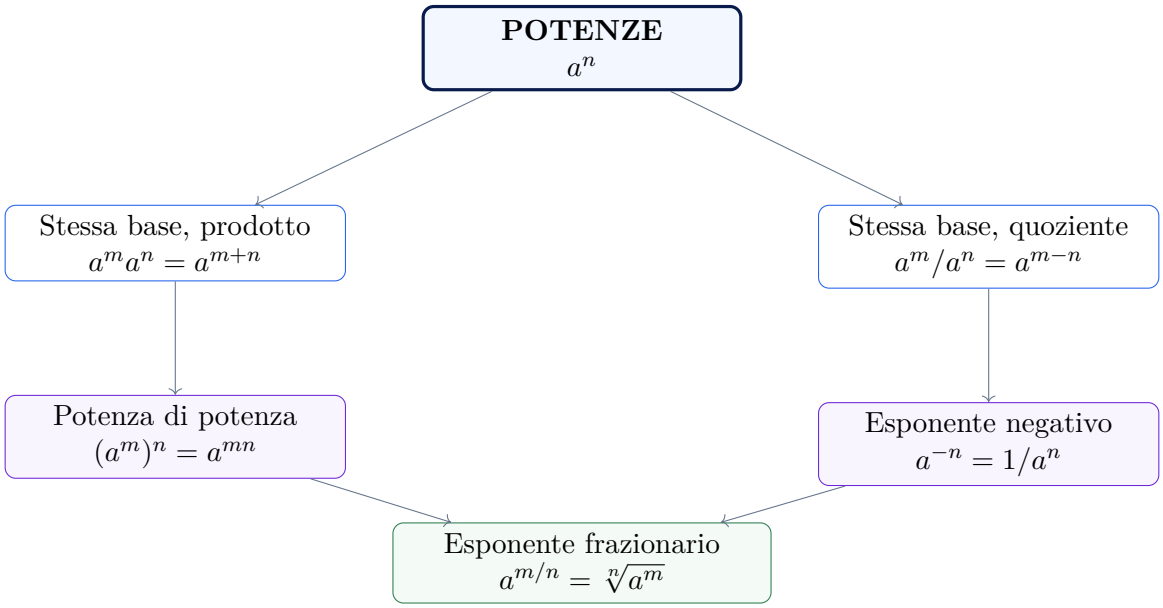
$$b)\ 10 - x = 4 \Rightarrow x = 6$$

$$c)\ 3x = 15 \Rightarrow x = 5$$

Poiché $0{,}0001 = 10^{-4}$:

$$d)\ x = -4.$$

17 Mappa finale



Ricorda

Prima di applicare una proprietà, chiediti sempre: le basi sono uguali? Gli esponenti sono uguali? L'operazione è un prodotto, un quoziente o una potenza di potenza? Gran parte degli errori nasce dall'uso di una proprietà nel contesto sbagliato.

Ti è piaciuta questa scheda?
Sul sito trovi altre risorse gratuite di fisica e matematica: teoria, esempi, esercizi e soluzioni pensati per studiare meglio, senza perdersi tra formule scritte male e spiegazioni inutilmente complicate.

STEMPower
www.progettostempower.it
Instagram: @stem_power_