FISICA

Scheda 05

L'equilibrio dei corpi

Forze, momenti, baricentro e leve

Teoria | Esempi | Esercizi | Soluzioni

Una guida chiara per imparare a riconoscere le condizioni di equilibrio traslazionale e rotazionale, calcolare il momento di una forza, individuare il baricentro, distinguere i diversi tipi di equilibrio e risolvere problemi su leve e corpi rigidi.

Indice

1 Che cosa significa equilibrio? 2

2 Equilibrio traslazionale 2
2.1 Esempio: una lampada sospesa . . . 3

3 Il diagramma di corpo libero 4
3.1 Procedura . . . 4

4 Il momento di una forza 5
4.1 Segno del momento . . . 6
4.2 Forza non perpendicolare . . . 6

5 Equilibrio rotazionale 7
5.1 Scelta del polo . . . 8

6 Coppia di forze 8

7 Centro di massa e baricentro 9

8 Stabilità dell'equilibrio 10

9 Metodo generale per i problemi di equilibrio 11

10 Errori comuni 12

11 Esercizi 13

12 Soluzioni 14

1 Che cosa significa equilibrio?

Nel linguaggio quotidiano associamo spesso l'equilibrio a un corpo fermo. In fisica, però, il concetto è più generale.

Un corpo è in **equilibrio** quando non modifica il proprio stato di moto traslazionale e rotazionale.

Si distinguono due situazioni:

- **equilibrio statico**: il corpo rimane fermo;
- **equilibrio dinamico**: il corpo si muove con velocità costante lungo una traiettoria rettilinea.

In entrambi i casi l'accelerazione del centro di massa è nulla:

$$\vec{a}_{CM} = \vec{0}.$$

Per un punto materiale è sufficiente studiare la risultante delle forze. Un corpo esteso, invece, può anche ruotare: per avere equilibrio completo bisogna quindi impedire sia la traslazione sia la rotazione.

Ricorda

Un corpo rigido è in equilibrio completo quando sono verificate contemporaneamente due condizioni:

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}}$$

e

$$\boxed{\sum_i M_i = 0}.$$

La prima impedisce l'accelerazione del centro di massa; la seconda impedisce la variazione dello stato di rotazione.

2 Equilibrio traslazionale

Il secondo principio della dinamica stabilisce che

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_{CM}.$$

Se la risultante delle forze esterne è nulla, allora anche l'accelerazione del centro di massa è nulla:

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}_{CM} = \vec{0}}.$$

Il centro di massa rimane quindi fermo oppure si muove di moto rettilineo uniforme.

Nel piano, la condizione vettoriale equivale a due equazioni scalari:

$$\boxed{\sum_i F_{x,i} = 0} \qquad \boxed{\sum_i F_{y,i} = 0}.$$

Nello spazio occorre aggiungere anche

$$\boxed{\sum_i F_{z,i} = 0}.$$

Attenzione

Una risultante nulla non significa che sul corpo non agiscano forze.
Significa che tutte le forze presenti si compensano vettorialmente.

2.1 Esempio: una lampada sospesa

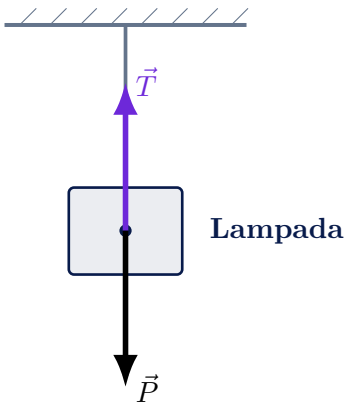
Consideriamo una lampada di massa

$$m = 5{,}0\,\text{kg}$$

appesa a una fune verticale e ferma.

Sulla lampada agiscono due forze:

- la forza peso $\vec{P}$, diretta verso il basso;
- la tensione $\vec{T}$, esercitata dalla fune verso l'alto.



Scegliendo positivo il verso verso l'alto, la condizione di equilibrio è

$$\sum F_y = 0.$$

Pertanto

$$T - P = 0.$$

Poiché

$$P = mg,$$

si ottiene

$$T = mg.$$

Utilizzando $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$:

$$T = 5{,}0 \cdot 9{,}8 = 49\,\mathrm{N}.$$

Quindi

$$\boxed{T = 49\,\mathrm{N}}.$$

Ricorda

L'uguaglianza $T = P$ non è una proprietà generale della tensione.
Vale in questo caso perché la lampada è in equilibrio e su di essa agiscono soltanto due forze verticali opposte.

3 Il diagramma di corpo libero

Per risolvere un problema di equilibrio è fondamentale costruire il **diagramma di corpo libero**.

Il corpo viene isolato dall'ambiente e rappresentato mediante un punto o una forma semplice. Si disegnano poi tutte e sole le forze esterne che agiscono su di esso.

3.1 Procedura

1. **Scegli il corpo da studiare.**

   Individua con precisione l'oggetto sul quale vuoi applicare le condizioni di equilibrio.

2. **Isola il corpo.**

   Sostituiscilo con un punto materiale oppure con una forma geometrica semplice.

3. **Individua tutte le interazioni.**

   Chiediti quali corpi o campi esercitano forze sull'oggetto: la Terra, una superficie, una fune, una molla o altri corpi.

4. **Disegna le forze esterne.**

   Rappresenta ogni forza con una freccia, indicando direzione, verso e simbolo.

5. **Scegli gli assi cartesiani.**

   Conviene scegliere gli assi in modo da ridurre il numero di forze da scomporre.

6. **Scomponi le forze inclinate.**

   Determina le componenti lungo gli assi scelti.

7. **Scrivi le equazioni di equilibrio.**

   Per la traslazione:

   $$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0.$$

   Per la rotazione:

   $$\sum M = 0.$$

Attenzione

Nel diagramma di corpo libero non si disegnano:
- la velocità;
- l'accelerazione;
- la traiettoria;
- le forze che il corpo esercita sugli altri oggetti;
- una presunta "forza del movimento".

Devono comparire soltanto le forze esercitate **sul corpo scelto**.

4 Il momento di una forza

Una forza può modificare il moto traslazionale di un corpo, ma può anche tendere a farlo ruotare.

Pensiamo a una porta: spingere vicino ai cardini è poco efficace, mentre applicare la stessa forza vicino alla maniglia produce una rotazione molto più evidente.

L'efficacia rotazionale di una forza viene descritta dal **momento della forza**.

Il momento di una forza rispetto a un punto O è definito da

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}}$$

dove $\vec{r}$ è il vettore che unisce il polo O al punto di applicazione della forza.

Il modulo del momento è

$$\boxed{M_O = rF \sin\theta}$$

dove θ è l'angolo compreso tra $\vec{r}$ e $\vec{F}$.

Poiché

$$b = r \sin\theta,$$

si può anche scrivere

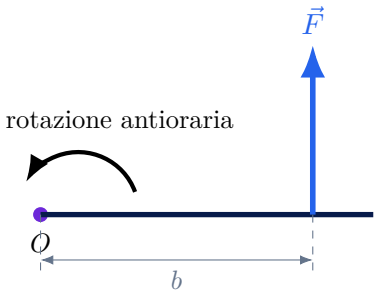
$$\boxed{M_O = Fb},$$

dove b è il **braccio della forza**, cioè la distanza perpendicolare tra il polo e la retta d'azione della forza.

Ricorda

Il momento aumenta:
- aumentando il modulo della forza;
- aumentando il braccio;
- applicando la forza in una direzione più vicina alla perpendicolare.

A parità di forza, è quindi più efficace agire lontano dal fulcro.



Nel Sistema Internazionale il momento si misura in

$$\mathrm{N\,m}.$$

4.1 Segno del momento

Nei problemi piani è utile attribuire un segno al momento.

Una convenzione molto comune è:

- momento positivo se la forza tende a produrre una rotazione antioraria;
- momento negativo se la forza tende a produrre una rotazione oraria.

La convenzione opposta è ugualmente valida, purché venga mantenuta per tutto il problema.

Esempio

Aprire una porta
Una forza di

$$F = 30\,\mathrm{N}$$

viene applicata perpendicolarmente a una porta a una distanza

$$b = 0{,}80\,\mathrm{m}$$

dai cardini.
Il momento rispetto ai cardini vale

$$M = Fb = 30 \cdot 0{,}80 = 24\,\mathrm{N\,m}.$$

Pertanto

$$\boxed{M = 24\,\mathrm{N\,m}}.$$

Se la stessa forza fosse applicata a metà distanza dai cardini, il braccio si dimezzerebbe e anche il momento sarebbe dimezzato.

4.2 Forza non perpendicolare

Se la forza forma un angolo θ con il vettore posizione $\vec{r}$, il momento vale

$$M_O = rF\sin\theta.$$

La forza può essere scomposta in:

- una componente parallela a $\vec{r}$;
- una componente perpendicolare a $\vec{r}$.

La componente parallela non produce rotazione perché la sua retta d'azione passa per il fulcro.

Soltanto la componente perpendicolare contribuisce al momento:

$$F_\perp = F \sin\theta,$$

perciò

$$M_O = rF_\perp.$$

Ricorda

Una forza la cui retta d'azione passa per il fulcro ha braccio nullo e quindi momento nullo, anche se il modulo della forza è molto grande.

5 Equilibrio rotazionale

Un corpo rigido è in equilibrio rotazionale quando non modifica il proprio stato di rotazione.

La condizione è che la somma algebrica dei momenti di tutte le forze esterne sia nulla:

$$\boxed{\sum_i M_{O,i} = 0}.$$

I momenti che tendono a far ruotare il corpo in senso antiorario devono quindi bilanciare quelli che tendono a farlo ruotare in senso orario.

Attenzione

L'equilibrio traslazionale non garantisce automaticamente l'equilibrio rotazionale.
È possibile avere

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

ma

$$\sum_i M_{O,i} \neq 0.$$

In questo caso il corpo non trasla, ma tende comunque a ruotare.

Per avere equilibrio completo bisogna verificare entrambe le condizioni:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \qquad \sum_i M_{O,i} = 0.$$

5.1 Scelta del polo

Spesso conviene scegliere come polo il punto in cui agiscono una o più forze incognite. Poiché il loro braccio rispetto a quel punto è nullo, tali forze non compaiono nell'equazione dei momenti.

Esempio

Sbarra in equilibrio
Una sbarra orizzontale leggera è appoggiata su un fulcro centrale.
A sinistra agisce una forza

$$F_1 = 40\,\mathrm{N}$$

a una distanza

$$b_1 = 1{,}5\,\mathrm{m}$$

dal fulcro.
A destra agisce una forza F_2 a una distanza

$$b_2 = 1{,}0\,\mathrm{m}.$$

Scegliendo positivo il verso antiorario, la condizione di equilibrio rotazionale è

$$F_1 b_1 - F_2 b_2 = 0.$$

Quindi

$$40 \cdot 1{,}5 - F_2 \cdot 1{,}0 = 0.$$

Da cui

$$\boxed{F_2 = 60\,\mathrm{N}}.$$

La forza applicata più vicino al fulcro deve essere maggiore per produrre lo stesso momento.

6 Coppia di forze

Una **coppia di forze** è formata da due forze:

- parallele;
- uguali in modulo;
- opposte in verso;
- applicate lungo rette d'azione differenti.

La risultante delle forze è nulla:

$$\vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0}.$$

Il corpo non acquista quindi un'accelerazione traslazionale.

I momenti delle due forze, però, hanno lo stesso verso di rotazione e si sommano. La coppia tende quindi a far ruotare il corpo senza traslarne il centro di massa.

Se d è la distanza perpendicolare tra le rette d'azione delle due forze, il momento della coppia vale

$$\boxed{M_{\text{coppia}} = Fd}.$$

Il momento di una coppia non dipende dal punto rispetto al quale viene calcolato.

Curiosità

Come si gira un volante?
Quando giri un volante con entrambe le mani, puoi esercitare due forze approssimativamente parallele, uguali e opposte.
La risultante delle forze è quasi nulla, ma i due momenti hanno lo stesso verso: il volante ruota senza che il suo centro venga trascinato lateralmente.

7 Centro di massa e baricentro

Il **centro di massa** è il punto che rappresenta la posizione media della massa di un corpo o di un sistema di corpi.

Il moto traslazionale complessivo di un corpo può essere descritto come se tutta la sua massa fosse concentrata nel centro di massa e su di esso agisse la risultante delle forze esterne.

Per un insieme di masse puntiformi distribuite lungo l'asse x:

$$\boxed{x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}}.$$

Nel piano:

$$\boxed{x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}}$$

e

$$\boxed{y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}}.$$

Il **baricentro** è invece il punto di applicazione della forza peso risultante.

In un campo gravitazionale uniforme, come quello terrestre per corpi di dimensioni ordinarie, centro di massa e baricentro coincidono.

Ricorda

Centro di massa e baricentro non sono concetti identici.
Coincidono quando il campo gravitazionale può essere considerato uniforme, condizione generalmente valida negli esercizi scolastici.

Per un corpo omogeneo e simmetrico, il centro di massa coincide spesso con il centro geometrico.

Per un corpo irregolare o non omogeneo può trovarsi in una posizione diversa. Può perfino trovarsi in un punto in cui non è presente materiale, come nel centro di un anello.

Esempio

Centro di massa di due corpi
Due masse

$$m_1 = 2\,\text{kg}, \qquad m_2 = 6\,\text{kg}$$

si trovano rispettivamente nelle posizioni

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 4\,\text{m}.$$

Il centro di massa è

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Sostituendo i valori:

$$x_{CM} = \frac{2 \cdot 0 + 6 \cdot 4}{2 + 6} = \frac{24}{8} = 3\,\text{m}.$$

Pertanto

$$\boxed{x_{CM} = 3\,\text{m}}.$$

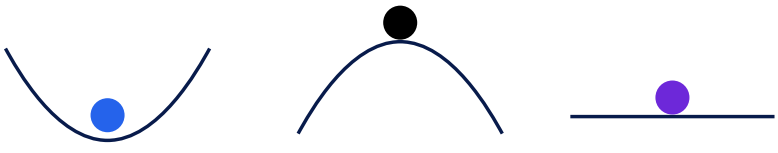
Il centro di massa si trova più vicino alla massa maggiore, come ci si aspetta.

8 Stabilità dell'equilibrio

Un corpo può trovarsi in equilibrio, ma reagire in modi diversi a una piccola perturbazione.

Si distinguono tre tipi di equilibrio.

Tipo	Dopo un piccolo spostamento	Esempio
Stabile	Il corpo tende a tornare nella posizione iniziale.	Una pallina sul fondo di una conca.
Instabile	Il corpo tende ad allontanarsi ulteriormente dalla posizione iniziale.	Una pallina sulla cima di una collina.
Indifferente	Il corpo rimane nella nuova posizione.	Una pallina su un piano orizzontale.



stabile **instabile** **indifferente**

Dal punto di vista dell'energia potenziale:

- nell'equilibrio stabile l'energia potenziale presenta un minimo;
- nell'equilibrio instabile presenta un massimo;
- nell'equilibrio indifferente rimane costante per piccoli spostamenti.

Ricorda

Nell'equilibrio stabile, un piccolo spostamento genera una forza o un momento che tende a riportare il corpo verso la configurazione iniziale.
Nell'equilibrio instabile accade il contrario: la perturbazione tende ad aumentare.

9 Metodo generale per i problemi di equilibrio

Per risolvere correttamente un problema di equilibrio conviene seguire una procedura ordinata.

1. **Scegli il corpo da studiare.**
2. **Costruisci il diagramma di corpo libero.**

   Disegna tutte e sole le forze esterne che agiscono sul corpo.
3. **Individua i punti di applicazione.**

   Per calcolare i momenti è necessario conoscere anche dove agiscono le forze.
4. **Scegli gli assi e i versi positivi.**
5. **Scegli un polo conveniente.**

   Conviene spesso scegliere un punto attraversato dalle rette d'azione delle forze incognite.
6. **Stabilisci la convenzione dei segni per i momenti.**

   Per esempio: antiorario positivo e orario negativo.
7. **Scrivi le condizioni di equilibrio traslazionale:**

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0.$$

8. **Scrivi la condizione di equilibrio rotazionale:**

$$\sum M_O = 0.$$

9. **Risolvi il sistema di equazioni.**
10. **Controlla il risultato.**

    Verifica unità di misura, segni e plausibilità fisica.

Ricorda

Per eliminare una forza incognita dall'equazione dei momenti, scegli come polo un punto attraversato dalla sua retta d'azione.
Il suo braccio sarà nullo e quindi anche il suo momento sarà nullo.

10 Errori comuni

Attenzione

Errore 1: pensare che equilibrio significhi necessariamente quiete.
Un corpo può essere in equilibrio anche mentre si muove di moto rettilineo uniforme.

Attenzione

Errore 2: verificare soltanto la risultante delle forze.
Per un corpo esteso bisogna controllare anche la somma dei momenti.

Attenzione

Errore 3: usare la distanza dal fulcro invece del braccio.
Il braccio è la distanza **perpendicolare** tra il polo e la retta d'azione della forza.

Attenzione

Errore 4: considerare sempre positivo il momento di una forza.
Il segno dipende dal verso di rotazione prodotto e dalla convenzione scelta.

Attenzione

Errore 5: pensare che risultante nulla implichi momento nullo.
Una coppia di forze ha risultante nulla, ma produce un momento totale diverso da zero.

Attenzione

Errore 6: confondere centro di massa e baricentro in ogni situazione.
I due punti coincidono soltanto quando il campo gravitazionale può essere considerato uniforme.

Attenzione

Errore 7: scegliere un polo scomodo.
Il polo può essere scelto liberamente. Conviene spesso collocarlo nel punto di applicazione delle forze incognite, così il loro momento è nullo.

Ti è piaciuta questa scheda?
Sul sito trovi altre risorse gratuite di fisica e matematica: teoria, esempi, esercizi e soluzioni pensati per studiare meglio, senza perdersi tra formule scritte male e spiegazioni inutilmente complicate.

STEMPower
www.progettostempower.it
Instagram: @stem_power_

STEMPower – Divulgazione, Inclusione e Innovazione per il Futuro Scientifico

11 Esercizi

Esercizio

1. Equilibrio di una lampada
Una lampada di massa 8,0kg è appesa a un filo verticale ed è ferma. Calcola la tensione del filo usando $g = 9{,}8\text{m/s}^2$.

Esercizio

2. Momento di una forza
Una forza perpendicolare di 25N è applicata a 0,40m dal fulcro. Calcola il momento.

Esercizio

3. Forza inclinata
Una forza di 50N è applicata a 0,60m dal fulcro formando un angolo di 30° con la sbarra. Calcola il modulo del momento.

Esercizio

4. Altalena in equilibrio
Un bambino di peso 300N siede a 2,0m dal fulcro. A quale distanza dal lato opposto deve sedersi un bambino di peso 500N affinché l'altalena sia in equilibrio? Trascurare il peso dell'asse.

Esercizio

5. Centro di massa
Tre masse sono disposte lungo l'asse x: $m_1 = 1\text{kg}$ in $x_1 = 0$, $m_2 = 2\text{kg}$ in $x_2 = 3\text{m}$ e $m_3 = 3\text{kg}$ in $x_3 = 6\text{m}$. Determina x_{CM}.

Esercizio

6. Coppia di forze
Due forze parallele e opposte di modulo 45N hanno rette d'azione distanti 0,30m. Calcola il momento della coppia.

Esercizio

7. Insegna sospesa
Un'insegna di peso 240N è fissata all'estremità di una sbarra orizzontale leggera lunga 1,5m, incernierata alla parete. Una fune collega l'estremità libera della sbarra a un punto della parete e forma un angolo di 40° con la sbarra. Calcola la tensione della fune. Determina poi le componenti orizzontale e verticale della reazione della cerniera.

12 Soluzioni

1. Equilibrio di una lampada

In equilibrio verticale:

$$T - P = 0 \quad \Rightarrow \quad T = mg.$$

Quindi:

$$T = 8{,}0 \cdot 9{,}8 = 78{,}4\text{N}.$$

2. Momento di una forza

Poiché la forza è perpendicolare:

$$M = Fb = 25 \cdot 0{,}40 = 10\text{N m}.$$

3. Forza inclinata

$$M = rF\sin\theta = 0{,}60 \cdot 50 \cdot \sin 30^\circ.$$

Poiché $\sin 30^\circ = 0{,}5$:

$$M = 15\text{N m}.$$

4. Altalena in equilibrio

Ponendo uguali i moduli dei momenti:

$$300 \cdot 2{,}0 = 500 \cdot d.$$

Da cui:

$$d = \frac{600}{500} = 1{,}2\text{m}.$$

5. Centro di massa

$$x_{CM} = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 6}{1 + 2 + 3} = \frac{24}{6} = 4\text{m}.$$

6. Coppia di forze

$$M_{\text{coppia}} = Fd = 45 \cdot 0{,}30 = 13{,}5\text{N m}.$$

7. Insegna sospesa

Calcoliamo i momenti rispetto alla cerniera. Solo la componente verticale della tensione produce momento:

$$T\sin 40^\circ \cdot 1{,}5 - 240 \cdot 1{,}5 = 0.$$

Quindi:

$$T\sin 40^\circ = 240, \qquad T = \frac{240}{\sin 40^\circ} \approx 373\text{N}.$$

La componente orizzontale della tensione è $T\cos 40^\circ$ verso la parete; la cerniera deve esercitare una reazione opposta:

$$R_x = T\cos 40^\circ \approx 286\text{N}.$$

In verticale:

$$R_y + T\sin 40^\circ - 240 = 0.$$

Poiché $T\sin 40^\circ = 240\text{N}$:

$$R_y = 0.$$