FISICA

Scheda 02

Vettori:
modulo, direzione, verso, operazioni e componenti

Teoria | Esempi | Esercizi | Soluzioni

Una guida chiara per riconoscere, rappresentare e usare i vettori: dalla differenza tra grandezze scalari e vettoriali fino alla somma, alla differenza e alla scomposizione lungo gli assi cartesiani.

Indice

1 Perché servono i vettori? 2

2 Scalari e vettori 2
2.1 Grandezze scalari . . . 2
2.2 Grandezze vettoriali . . . 2

3 Cos'è un vettore? 3
3.1 Modulo . . . 3
3.2 Direzione . . . 3
3.3 Verso . . . 3

4 Vettori uguali e opposti 4
4.1 Vettori uguali . . . 4
4.2 Vettori opposti . . . 4

5 Somma di vettori 5
5.1 Metodo punta-coda . . . 5
5.2 Regola del parallelogramma . . . 5

6 Differenza tra vettori 6

7 Moltiplicazione di un vettore per uno scalare 6

8 Componenti cartesiane di un vettore 7
8.1 Mini ripasso: seno e coseno . . . 7
8.2 Dal vettore alle componenti . . . 8
8.3 Dalle componenti al modulo . . . 8

9 Somma con le componenti 9

10 Versori 10

11 Prodotto scalare 10
11.1 Interpretazione . . . 11
11.2 Prodotto scalare con le componenti . . . 11

12 Prodotto vettoriale 12
12.1 Regola della mano destra . . . 12
12.2 Prodotto vettoriale con le componenti . . . 13

13 Errori comuni 14

14 Mappa finale 14

15 Esercizi 15

16 Soluzioni 17

1 Perché servono i vettori?

In fisica non basta sempre dire *quanto* vale una grandezza. Spesso bisogna dire anche *dove punta*.

Per esempio, dire che una forza vale 10N non è sufficiente. Una forza di 10N verso destra e una forza di 10N verso sinistra hanno lo stesso valore numerico, ma producono effetti molto diversi. Una può spingere un oggetto in avanti, l'altra può frenarlo.

Ricorda

Un vettore serve quando una grandezza fisica ha bisogno di più informazioni rispetto a un semplice numero.



Le due forze hanno lo stesso modulo, ma verso opposto. Se agiscono contemporaneamente sulla stessa linea, possono annullarsi.

2 Scalari e vettori

Le grandezze fisiche si dividono spesso in due grandi categorie: **grandezze scalari** e **grandezze vettoriali**.

2.1 Grandezze scalari

Una grandezza scalare è descritta completamente da:

- un numero;
- un'unità di misura.

Sono grandezze scalari, per esempio:

Grandezza	Esempio
Massa	2kg
Tempo	5s
Temperatura	20°C
Energia	100J
Densità	1000kg/m^3

2.2 Grandezze vettoriali

Una grandezza vettoriale è descritta da:

- modulo;
- direzione;
- verso;
- in alcuni casi, punto di applicazione.

Sono grandezze vettoriali:

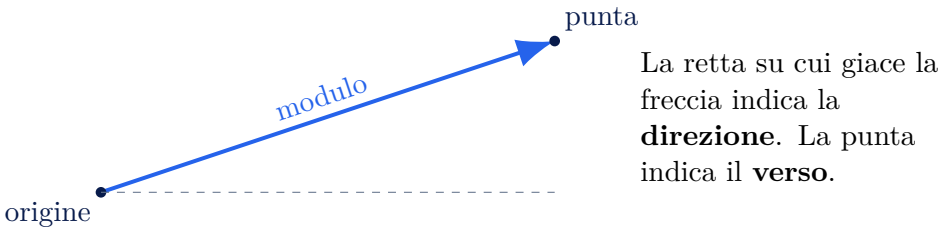
Grandezza	Esempio
Spostamento	3m verso est
Velocità	20m/s verso nord
Accelerazione	9,8m/s^2 verso il basso
Forza	50N verso destra

Attenzione

Dire "la velocità è 30m/s" non è sempre completo. Quello è il valore del modulo della velocità. Per descrivere davvero il vettore velocità bisogna specificare anche direzione e verso.

3 Cos'è un vettore?

Un vettore si rappresenta graficamente con una freccia.



3.1 Modulo

Il modulo è la lunghezza del vettore. Indica l'intensità della grandezza.

Se il vettore è $\vec{v}$, il suo modulo si scrive $|\vec{v}|$ oppure semplicemente v.

Ricorda

Il simbolo con la freccia sopra indica il vettore completo. Il modulo, invece, è un numero positivo o nullo.

$$\vec{v} \neq |\vec{v}|$$

Confonderli è uno degli errori più comuni.

3.2 Direzione

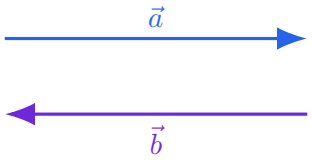
La direzione è la retta lungo cui il vettore è orientato. Per esempio: orizzontale, verticale, inclinata di 30° rispetto all'asse x.

3.3 Verso

Il verso indica da quale parte della direzione punta il vettore. Su una stessa direzione possono esserci due versi opposti.

Esempio

Due vettori possono avere stessa direzione ma verso opposto.



I due vettori in figura sono entrambi orizzontali, quindi hanno la stessa direzione, ma hanno verso opposto.

4 Vettori uguali e opposti

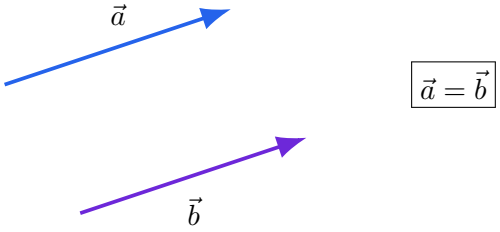
Due vettori non devono necessariamente partire dallo stesso punto per essere confrontati. Ciò che conta sono esclusivamente le loro caratteristiche geometriche.

4.1 Vettori uguali

Due vettori si dicono **uguali** se possiedono:

- lo stesso modulo;
- la stessa direzione;
- lo stesso verso.

La loro posizione nel piano non è importante: possono essere traslati senza modificare le loro proprietà.



Ricorda

Due vettori uguali possono avere origine in punti diversi del piano: ciò che conta è che abbiano lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso.

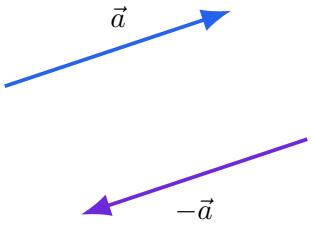
4.2 Vettori opposti

Il vettore opposto di $\vec{a}$ si indica con

$$-\vec{a}$$

e possiede:

- lo stesso modulo;
- la stessa direzione;
- verso opposto.



Attenzione

Attenzione a non confondere il vettore opposto con un vettore diverso.
Il simbolo $-\vec{a}$ non indica un nuovo vettore qualsiasi, ma il vettore che ha lo stesso modulo e la stessa direzione di $\vec{a}$, con verso opposto.

5 Somma di vettori

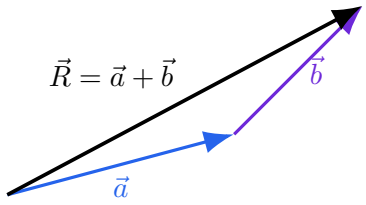
La somma di due vettori produce un nuovo vettore, chiamato **risultante**.

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$$

5.1 Metodo punta-coda

Per sommare graficamente due vettori:

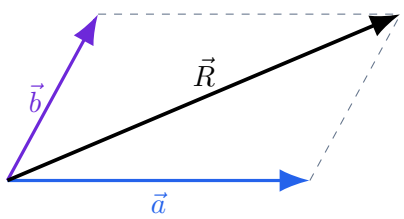
1. disegna il primo vettore;
2. sposta il secondo vettore in modo che la sua coda coincida con la punta del primo;
3. il vettore somma va dalla coda del primo alla punta del secondo.



5.2 Regola del parallelogramma

Per sommare graficamente due vettori:

1. disegna il primo vettore;
2. sposta il secondo vettore in modo che la sua coda coincida con la coda del primo;
3. costruisci il parallelogramma che ha quei vettori come lati;
4. il vettore somma è la diagonale maggiore del parallelogramma.



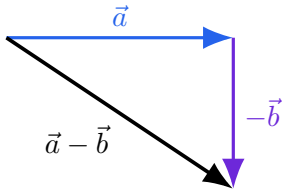
6 Differenza tra vettori

La differenza tra due vettori si interpreta come somma del primo vettore con l'opposto del secondo:

$$\vec{D} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Esempio

Se $\vec{a}$ punta verso destra e $\vec{b}$ punta verso l'alto, allora $\vec{a} - \vec{b}$ si ottiene sommando $\vec{a}$ con un vettore uguale a $\vec{b}$ ma rivolto verso il basso.



7 Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Un vettore può essere moltiplicato per un numero reale, chiamato scalare.

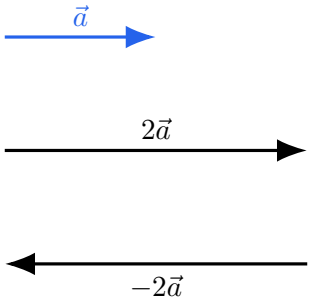
$$\vec{b} = k\vec{a}$$

Se $k > 0$, il vettore mantiene lo stesso verso di $\vec{a}$.

Se $k < 0$, il vettore cambia verso.

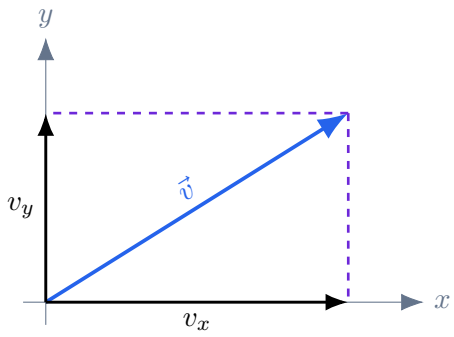
Se $|k| > 1$, il modulo aumenta.

Se $0 < |k| < 1$, il modulo diminuisce.



8 Componenti cartesiane di un vettore

Un vettore nel piano può essere scomposto lungo due assi perpendicolari: asse x e asse y.

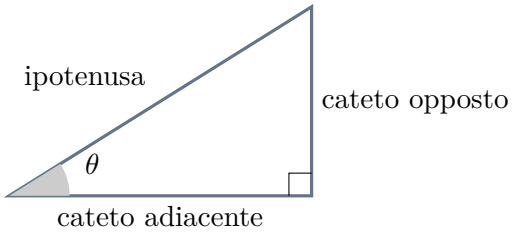


Le componenti sono le "ombre" del vettore sugli assi, dette **proiezioni**.

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

8.1 Mini ripasso: seno e coseno

Per usare le componenti bisogna ricordare il significato di seno e coseno in un triangolo rettangolo.



Rispetto all'angolo θ:

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}$$

Nel caso di un vettore, l'ipotenusa è il modulo del vettore v.

$$\cos\theta = \frac{v_x}{v} \quad \Rightarrow \quad v_x = v\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{v_y}{v} \quad \Rightarrow \quad v_y = v\sin\theta$$

Angolo θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$
$0°$	1	0
$30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}866$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}707$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}707$
$60°$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}866$
$90°$	0	1

8.2 Dal vettore alle componenti

Ricorda

Se l'angolo θ è misurato rispetto all'asse x, allora la componente lungo x usa il coseno e quella lungo y usa il seno.

$$v_x = v\cos\theta \qquad v_y = v\sin\theta$$

Attenzione

Questa regola vale quando l'angolo è preso rispetto all'asse x. Se l'angolo è preso rispetto all'asse y, seno e coseno si scambiano.

Esempio

Un vettore velocità ha modulo:

$$v = 10\text{m/s}$$

e forma un angolo di $30°$ con l'asse x.
Le componenti sono:

$$v_x = v\cos 30° = 10 \cdot 0{,}866 = 8{,}66\text{m/s}$$

$$v_y = v\sin 30° = 10 \cdot 0{,}5 = 5\text{m/s}$$

8.3 Dalle componenti al modulo

Se conosci le componenti v_x e v_y, puoi ricostruire il modulo usando il teorema di Pitagora:

$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

L'angolo rispetto all'asse x si trova con:

$$\boxed{\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}}$$

quindi:

$$\boxed{\theta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right)}$$

Esempio

Un vettore ha componenti:

$$v_x = 6\text{m/s}, \qquad v_y = 8\text{m/s}$$

Il modulo è:

$$v = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10\text{m/s}$$

L'angolo è:

$$\theta = \arctan\left(\frac{8}{6}\right) \simeq 53{,}1^\circ$$

9 Somma con le componenti

Il metodo grafico è utile per capire. Il metodo con le componenti è utile per calcolare.

Se:

$$\vec{a} = (a_x, a_y)$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y)$$

allora:

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x,\ a_y + b_y)}$$

Esempio

Siano:

$$\vec{a} = (3, 2), \qquad \vec{b} = (4, -1)$$

Allora:

$$\vec{a} + \vec{b} = (3 + 4,\ 2 + (-1)) = (7, 1)$$

Il vettore risultante ha componenti:

$$R_x = 7, \qquad R_y = 1$$

Il suo modulo è:

$$R = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} \simeq 7{,}1$$

Per la differenza:

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x,\ a_y - b_y)}$$

10 Versori

I versori sono vettori di modulo 1 usati per indicare una direzione.

Nel piano cartesiano si usano spesso:

$$\hat{i} \quad \text{lungo l'asse } x$$

$$\hat{j} \quad \text{lungo l'asse } y$$

Un vettore può essere scritto come:

$$\boxed{\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}}$$

Esempio

Se un vettore ha componenti:

$$v_x = 4, \qquad v_y = 3$$

possiamo scrivere:

$$\vec{v} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$$

Curiosità

In tre dimensioni si aggiunge anche il versore $\hat{k}$ lungo l'asse z:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

Questa scrittura è fondamentale in meccanica, elettromagnetismo, astronomia, grafica 3D e simulazioni al computer.

11 Prodotto scalare

Il prodotto scalare è un'operazione tra due vettori che restituisce un numero reale (uno scalare).

Si indica con

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b}}$$

e si calcola come

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta}$$

dove:

- a e b sono i moduli dei due vettori;
- θ è l'angolo compreso tra essi.

Ricorda

Il risultato del prodotto scalare non è un vettore, ma un numero.

11.1 Interpretazione

Il prodotto scalare misura quanto due vettori sono orientati nella stessa direzione.

Angolo	Prodotto scalare
$0°$	massimo positivo
$90°$	0
$180°$	massimo negativo

Esempio

Una forza di

$$F = 20\text{N}$$

agisce nella stessa direzione dello spostamento

$$s = 5\text{m}.$$

Il prodotto scalare vale

$$F \cdot s = 20 \cdot 5 \cdot \cos 0° = 100.$$

In fisica questa operazione permette di calcolare il lavoro:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

11.2 Prodotto scalare con le componenti

Se

$$\vec{a} = (a_x, a_y)$$

e

$$\vec{b} = (b_x, b_y)$$

allora

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y}$$

Questa formula è molto usata negli esercizi perché evita di calcolare prima l'angolo tra i vettori.

12 Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale è un'operazione tra due vettori che restituisce un nuovo vettore.

Si indica con

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b}}$$

Il modulo vale

$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta}$$

dove θ è l'angolo tra i due vettori.

Ricorda

Il risultato del prodotto vettoriale è sempre un vettore perpendicolare al piano contenente i due vettori iniziali.

12.1 Regola della mano destra

Per determinare il verso del vettore risultante si utilizza la regola della mano destra.

- pollice nella direzione di $\vec{a}$;
- indice nella direzione di $\vec{b}$;
- medio indica il verso di $\vec{a} \times \vec{b}$.

Angolo	Modulo del prodotto vettoriale
$0°$	0
$90°$	massimo
$180°$	0

Curiosità

Il prodotto vettoriale compare continuamente in fisica.
Tra gli esempi più importanti troviamo:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

(momento di una forza)
e

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

(forza magnetica di Lorentz).

12.2 Prodotto vettoriale con le componenti

Se i due vettori appartengono al piano xy:

$$\vec{a} = (a_x, a_y)$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y)$$

allora il loro prodotto vettoriale è diretto lungo l'asse z ed è dato da

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = (a_x b_y - a_y b_x)\,\hat{k}}$$

dove $\hat{k}$ è il versore dell'asse z.

Ricorda

Nel piano il prodotto vettoriale restituisce un vettore perpendicolare al piano stesso. Per questo motivo è sufficiente calcolare la sua componente lungo l'asse z.

Esempio

Siano

$$\vec{a} = (2, 3)$$

$$\vec{b} = (5, 1)$$

Allora

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2 \cdot 1 - 3 \cdot 5)\hat{k} = (2 - 15)\hat{k} = -13\,\hat{k}.$$

Il segno negativo indica che il vettore risultante è diretto nel verso negativo dell'asse z.

Curiosità

In tre dimensioni il prodotto vettoriale si calcola con il determinante

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}$$

Questa formula viene studiata generalmente all'università ed è molto utilizzata in fisica e ingegneria.

13 Errori comuni

Attenzione

Errore 1: confondere direzione e verso.
La direzione è la retta lungo cui il vettore agisce. Il verso è uno dei due sensi possibili lungo quella direzione.

Attenzione

Errore 2: dimenticare il segno delle componenti.
Se un vettore punta verso sinistra, la componente x può essere negativa. Se punta verso il basso, la componente y può essere negativa.

Attenzione

Errore 3: usare sempre $v_x = v\cos\theta$ senza guardare l'angolo.
Prima guarda rispetto a quale asse è misurato l'angolo. Poi scegli seno e coseno.

14 Mappa finale



15 Esercizi

Esercizio

Esercizio 1
Stabilisci se le seguenti grandezze sono scalari o vettoriali:

a) massa
b) forza
c) temperatura
d) velocità
e) tempo
f) accelerazione

Esercizio

Esercizio 2
Disegna un vettore $\vec{a}$ orizzontale verso destra e un vettore $\vec{b}$ orizzontale verso sinistra, con stesso modulo. Che relazione c'è tra i due vettori?

Esercizio

Esercizio 3
Un vettore forza ha modulo 20N ed è diretto verso l'alto. Indica modulo, direzione e verso.

Esercizio

Esercizio 4
Due spostamenti sono perpendicolari: il primo vale 3m verso est, il secondo 4m verso nord. Calcola il modulo dello spostamento risultante.

Esercizio

Esercizio 5 Un vettore ha modulo 12N e forma un angolo di 60° con l'asse x. Calcola le componenti F_x e F_y.

Esercizio

Esercizio 6
Un vettore ha componenti:

$$a_x = 5, \qquad a_y = 12$$

Calcola il modulo del vettore.

Esercizio

Esercizio 7
Dati i vettori:

$$\vec{a} = (2, 5), \qquad \vec{b} = (3, -1)$$

calcola:

$$\vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{a} - \vec{b}$$

Esercizio

Esercizio 8
Una velocità ha componenti:

$$v_x = -6\text{m/s}, \qquad v_y = 8\text{m/s}$$

Calcola il modulo della velocità. In quale quadrante del piano cartesiano si trova il vettore?

Esercizio

Esercizio 9
Una forza di modulo 50N forma un angolo di 120° con l'asse x positivo. Calcola le componenti F_x e F_y.

Esercizio

Esercizio 10
Due vettori hanno componenti:

$$\vec{a} = (6, 2), \qquad \vec{b} = (-1, 5)$$

Calcola il vettore risultante $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$ e il suo modulo.

16 Soluzioni

Soluzione 1

Grandezza	Tipo
Massa	scalare
Forza	vettoriale
Temperatura	scalare
Velocità	vettoriale
Tempo	scalare
Accelerazione	vettoriale

Soluzione 2

I due vettori hanno stesso modulo e stessa direzione, ma verso opposto. Quindi:

$$\vec{b} = -\vec{a}$$

Soluzione 3

- Modulo: 20N.
- Direzione: verticale.
- Verso: verso l'alto.

Soluzione 4

I due spostamenti sono perpendicolari, quindi si usa Pitagora:

$$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5\text{m}$$

Soluzione 5

$$F_x = F \cos 60^\circ = 12 \cdot 0{,}5 = 6\text{N}$$

$$F_y = F \sin 60^\circ = 12 \cdot 0{,}866 \simeq 10{,}4\text{N}$$

Soluzione 6

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Soluzione 7

Somma:

$$\vec{a} + \vec{b} = (2 + 3,\ 5 + (-1)) = (5, 4)$$

Differenza:

$$\vec{a} - \vec{b} = (2 - 3,\ 5 - (-1)) = (-1, 6)$$

Soluzione 8

$$v = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10\text{m/s}$$

Poiché $v_x < 0$ e $v_y > 0$, il vettore si trova nel secondo quadrante.

Soluzione 9

$$F_x = F\cos 120^\circ = 50 \cdot (-0{,}5) = -25\text{N}$$

$$F_y = F\sin 120^\circ = 50 \cdot 0{,}866 \simeq 43{,}3\text{N}$$

Il segno negativo di F_x indica che la componente orizzontale punta verso sinistra.

Soluzione 10

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} = (6 + (-1),\ 2 + 5) = (5, 7)$$

Il modulo è:

$$R = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} \simeq 8{,}6$$

Ti è piaciuta questa scheda?
Sul sito trovi altre risorse gratuite di fisica e matematica: teoria, esempi, esercizi e soluzioni pensati per studiare meglio, senza perdersi tra formule scritte male e spiegazioni inutilmente complicate.

STEMPower
www.progettostempower.it
Instagram: @stem_power_

STEMPower – Divulgazione, Inclusione e Innovazione per il Futuro Scientifico